令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

1

①	②	③	④	⑤
キ	エ	ク	コ	カ

２点×５

2

（１）　中央値が 7 であり，$2<6<7$ (中央値) $<8<10$　かつ　$x<y<z$ より y が中央値になる。

５点

したがって $y=7$

（２） データの値をαとする。

15 点

α	x	$y=7$	z	2	6	8	10
$\alpha-\overline{\alpha}$	$x-7$	0	$z-7$	-5	-1	1	3
$(\alpha-\overline{\alpha})^2$	$(x-7)^2$	0	$(z-7)^2$	25	1	1	9

$(x-7)+0+(z-7)-5-1+1+3=0$　より　$x+z=16\cdots$①

$\dfrac{(x-7)^2+0+(z-7)^2+25+1+1+9}{7}=10$ であるから

$(x-7)^2+(z-7)^2=34$

①より $z=16-x$ を代入すると　$(x-7)^2+(-x+9)^2=34$

$x^2-16x+48=0$　　$(x-4)(x-12)=0$　　$x<z$ より $x=4\,,\,z=12$

令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

3

始めに頂点 A に位置していた点 P が 2 回の移動で頂点 A に移動することを，A→□→Aのように表す。また，点 P が 3 回，4 回と移動するときについても同様に表すこととする。

（1）　点 P が 2 回移動するとき，移動の方法は全部で 3^2 通りある。

2 回の移動で点 P が頂点 A にあるとき，A→□→Aの□には A 以外の 3 つの頂点のいずれかが入るので，移動の方法は 3 通りある。

10 点

したがって，求める確率は，

$$\frac{3}{3^2}=\frac{1}{3}$$

（2）　4 回の移動で点 P が頂点 A にあるのは 3 回の移動で点 P が A 以外にあって，4 回目の移動で A に移動する場合である。

3 回の移動で点 P が頂点 A にあるとき，A→□→□→Aの□には A 以外の 3 つの頂点のうち 2 つの頂点が 1 か所ずつ入るので，移動の方法は ${}_3P_2=3\times2=6$ 通り

よって，3 回の移動で点 P が頂点 A に移動する確率は，

$$\frac{6}{3^3}=\frac{2}{9}$$

ゆえに，3 回の移動で点 P が頂点 A 以外に移動する確率は，

$$1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

10 点

したがって，求める確率は，

$$\frac{7}{9}\times\frac{1}{3}=\frac{7}{27}$$

（3）　4 回の移動で点 P が B，C，D のすべての頂点を通って A に移動するのは，A→□→□→□→A と点 P が移動するとき，□には A 以外の 3 つの頂点が 1 か所ずつ入るので，移動の仕方は $3!=3\times2\times1=6$ 通り

よって，4 回の移動で点 P が B，C，D のすべての頂点を通って A にある確率は，

$$\frac{6}{3^4}=\frac{2}{27}$$

10 点

ゆえに，求める条件付き確率は，$\dfrac{\frac{2}{27}}{\frac{7}{27}}=\dfrac{2}{7}$

令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	40 点

4

（１）　$0 \leqq y \leqq \sqrt{3}\,x$ より　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$

10 点

（２）　$3x^2+2\sqrt{3}\,xy+y^2$

$=3\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+\sin^2\theta$

$=3\cdot\dfrac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$=\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta+2$

$=2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2$

30 点

$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{3}$ より $\dfrac{\pi}{6} \leqq 2\theta+\dfrac{\pi}{6} \leqq \dfrac{5}{6}\pi$

$\dfrac{1}{2} \leqq \sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right) \leqq 1$　より　$3 \leqq 2\sin\left(2\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)+2 \leqq 4$ …①

①より最大値は　4

このとき，$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}$　すなわち　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$

したがって，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\,,\ y=\dfrac{1}{2}$

①より最小値は　3

このとき，$2\theta+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}\,,\ \dfrac{5}{6}\pi$　すなわち　$\theta=0\,,\ \dfrac{\pi}{3}$

したがって，$x=1\,,\ y=0$　または　$x=\dfrac{1}{2}\,,\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

5

$\frac{1}{4}y^2+15=k^2$ (k は自然数)とおく。

15 点

$4k^2-y^2=60$　より　$(2k-y)(2k+y)=60$

$(2k-y)+(2k+y)=4k$ となり和が偶数になるので，これら２数の偶奇は一致する。

$(2k+y,\ 2k-y)=(30,\ 2),\ (10,\ 6),\ (6,\ 10),\ (2,\ 30),\ (-30,\ -2),\ (-10,\ -6),$
$(-6,\ -10),\ (-2,\ -30)$

また，k は自然数であるから

$(k,\ y)=(8,\ 14),\ (4,\ 2),\ (4,\ -2),\ (8,\ -14)$

したがって，　$y=14,\ -14,\ 2,\ -2$

6

$P(x)$ を x^2-5x+6 すなわち $(x-2)(x-3)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $ax+b$ (a，b は定数) とすると

$$P(x)=(x-2)(x-3)Q(x)+ax+b \quad \cdots\cdots ①$$

$P(x)$ を x^2-4，x^2-x-6 すなわち $(x+2)(x-2)$，$(x+2)(x-3)$ で割った商を，それぞれ $Q_1(x)$，$Q_2(x)$ とする。

15 点

条件から　$P(x)=(x+2)(x-2)Q_1(x)+4x+6 \quad \cdots\cdots ②$

$P(x)=(x+2)(x-3)Q_2(x)+3x+4 \quad \cdots\cdots ③$

② から　$P(2)=4\cdot 2+6=14$

③ から　$P(3)=3\cdot 3+4=13$

一方，① から　$P(2)=2a+b$，$P(3)=3a+b$

したがって　$2a+b=14$，$3a+b=13$

これを解いて　$a=-1$，$b=16$

ゆえに，求める余りは　$-x+16$

令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

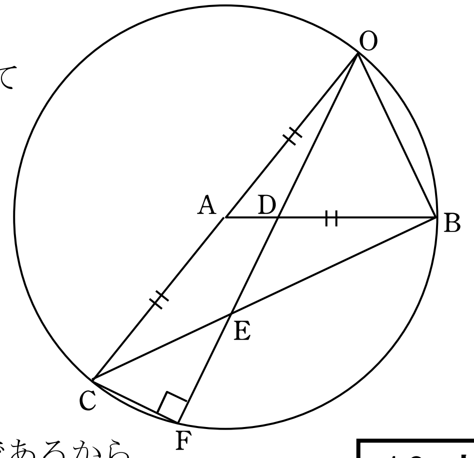
受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

7

（１）　余弦定理より　$AB^2 = 4^2 + (2\sqrt{2})^2 - 2\cdot 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4} = 16$

５点

$AB > 0$ より　$AB = 4$



（２）　$\overrightarrow{OD} = \dfrac{3}{4}\vec{a} + \dfrac{1}{4}\vec{b}$ であるから，実数 t を用いて

$$\overrightarrow{OE} = t\overrightarrow{OD} = \frac{3}{4}t\vec{a} + \frac{1}{4}t\vec{b} \quad \cdots\cdots ①$$

と表すことができる。

$\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA}$ であるから，①は

$$\overrightarrow{OE} = \frac{1}{4}t\overrightarrow{OB} + \frac{3}{8}t\overrightarrow{OC}$$

と変形することができる。E は線分 BC 上の点であるから

10 点

$$\frac{1}{4}t + \frac{3}{8}t = 1 \qquad t = \frac{8}{5}$$

よって　$\overrightarrow{OE} = \dfrac{6}{5}\vec{a} + \dfrac{2}{5}\vec{b}$

（３）　AO＝AB＝AC であるから，三角形 OBC の外接円は A を中心とする円である。
F は外接円の周上にあるので，$\angle OFC = 90°$ である。

$$\overrightarrow{FC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OF} = 2\overrightarrow{OA} - k\overrightarrow{OD} = 2\vec{a} - k\left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right) = \left(2 - \frac{3}{4}k\right)\vec{a} - \frac{k}{4}\vec{b}$$

また　$\vec{a}\cdot\vec{b} = 4\cdot 2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{4} = 4$

15 点

$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{FC} = 0$ となればよいので

$$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{FC} = \left(\frac{3}{4}\vec{a} + \frac{1}{4}\vec{b}\right)\cdot\left\{\left(2 - \frac{3}{4}k\right)\vec{a} - \frac{k}{4}\vec{b}\right\}$$

$$= \frac{3}{4}\left(2 - \frac{3}{4}k\right)\cdot 16 - \frac{3}{4}\cdot\frac{k}{4}\cdot 4 + \frac{1}{4}\left(2 - \frac{3}{4}k\right)\cdot 4 - \frac{1}{4}\cdot\frac{k}{4}\cdot 8$$

$$= 24 - \frac{36}{4}k - \frac{3}{4}k + 2 - \frac{3}{4}k - \frac{2}{4}k = 26 - 11k = 0$$

よって　$k = \dfrac{26}{11}$

令和６年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	40 点

8

（１）　$y'=-2e^{-2x}$ より，点 P_n における接線の方程式は

$$y-e^{-2x_n}=-2e^{-2x_n}(x-x_n)$$

これが，$Q_{n+1}(x_{n+1},0)$ を通るから，

$$0-e^{-2x_n}=-2e^{-2x_n}(x_{n+1}-x_n)$$

$e^{-2x}>0$ より，整理して，

$$x_{n+1}=x_n+\frac{1}{2}$$

10 点

（２）　（１）より $x_{n+1}-x_n=\dfrac{1}{2}$

これは，公差 $\dfrac{1}{2}$ の等差数列を表すから，初項 $x_0=0$ より

$$x_n=0+n\times\frac{1}{2}$$

したがって，$x_n=\dfrac{n}{2}$

10 点

（３）　求める面積は，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および，２直線 $x=x_n$，$x=x_{n+1}$ で囲まれた部分の面積から三角形 $Q_nP_nQ_{n+1}$ の面積を引けばいいので，

$$S_n=\int_{x_n}^{x_{n+1}}e^{-2x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-2x_n}$$

$$=\int_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}}e^{-2x}dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot e^{-n}$$

$$=\left[-\frac{1}{2}e^{-2x}\right]_{\frac{n}{2}}^{\frac{n+1}{2}}-\frac{1}{4}e^{-n}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-n-1}+\frac{1}{4}e^{-n}$$

10 点

（４）　$S_n=\left(-\dfrac{1}{2e}+\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ と変形できるから，

面積の総和は，初項 $-\dfrac{1}{2e}+\dfrac{1}{4}$，公比 $\dfrac{1}{e}$ の無限等比級数である。

$\left|\dfrac{1}{e}\right|<1$ より，この無限等比級数は収束して，その和は，

$$\sum_{n=0}^{\infty}S_n=\frac{-\dfrac{1}{2e}+\dfrac{1}{4}}{1-\dfrac{1}{e}}=\frac{e-2}{4(e-1)}$$

10 点