



文部科学省

MINISTRY OF EDUCATION,
CULTURE, SPORTS,
SCIENCE AND TECHNOLOGY-JAPAN

高等学校数学指導資料

数学的リテラシーを育む 授業事例集

— 数学的活動を通じた主体的・対話的で深い学びを踏まえて —



令和7年2月

文部科学省

本指導資料について

OECD生徒の学習到達度調査（PISA）の2022年調査の結果が2023年12月に発表されました。PISA調査は、義務教育修了段階の15歳の生徒が持っている知識や技能を、実生活の様々な場面で直面する課題にどの程度活用できるかを測ることを目的としています。PISA2022の中心分野は数学的リテラシーであり、次のような結果が明らかになりました。

- 日本の数学的リテラシーの平均得点（536点）は、引き続き世界トップレベル。OECD加盟国中1位（順位の範囲:1-2位）。
- 2018年調査からOECDの平均得点は大きく低下した一方で、日本は高水準で安定。
- 日本は、「各プロセスの平均得点」「各内容知識の平均得点」を見ても、国際的に高い。
- 日本は、OECD平均と比べて、習熟度レベル5以上の高得点層が多く、習熟度レベル1以下の低得点層が少ない傾向が、引き続き見られる。また、習熟度レベル5以上の高得点層の割合が、2018年調査から有意に増加している。

このような結果がもたらされた要因は様々に考えられていますが、その一つに、学校現場において現行の学習指導要領を踏まえた授業改善が進んだことが挙げられています。世界トップレベルの背景には、日本の教師が日々懸命に指導してきていることがあります。

一方で、PISA2022からは、実生活における課題を数学を使って解決する経験に関してなど、いくつかの課題も見えてきています。そもそも数学的リテラシーは、その性格からして高等学校段階においてより一層の伸長が求められるものであり、平成30年告示学習指導要領において育成を目指す「数学的に考える資質・能力」に含まれるものです。日本全体で見たときに15歳段階では世界トップレベルにあった数学的リテラシーが、高等学校修了段階では剥落していたなどという事態は避けねばなりません。PISA2022から見えてきた課題を踏まえながら、高等学校数学科において、生徒個々の数学的リテラシーをより一層伸長していく必要があります。

そこで、PISA2022における課題を踏まえつつ、高等学校数学科の日々の授業において数学的リテラシーを育成・伸長していく取組に資するため、本指導資料を作成しました。本指導資料は、数学的リテラシーの育成・伸長について説明する理論編と、多くの高校生が履修する数学Ⅰ及び数学Aを内容とする事例編で構成されています。事例編では、なるべく多様な事例が並ぶようにし、それぞれはあくまで一つの参考事例であることから、教師が生徒の実態に応じた創意工夫を加える際に参考となる視点から解説を加えました。

一人一人の生徒が豊かな人生を切り拓き、持続可能な社会の創り手となるに当たっては、高等学校数学科において数学的リテラシーをより一層伸長していくことが欠かせません。各校におかれては、本指導資料を参考の一つとして活用し、創意工夫を生かした教育活動を積極的に展開されることを期待いたします。

最後に、本書の作成に当たり、多大な御協力をいただいた協力者や関係の方々に、心から感謝申し上げます。

令和7年2月

目次

| | |
|-----------|----|
| 本指導資料について | 01 |
|-----------|----|

第1章 理論編 05

| | |
|-------------------------------------|----|
| 1.1. はじめに：高等学校数学科における数学的リテラシー育成の必要性 | 06 |
| 1.2. 数学的リテラシーを育むために | 08 |
| 数学的リテラシーとは | 08 |
| PISA2022からみた日本の数学教育の成果と課題 | 10 |
| 数学的リテラシーを育むための視点 | 13 |
| 1.3. 高等学校学習指導要領と数学的リテラシー | 15 |
| 高等学校数学科の目標と数学的リテラシーの育成 | 15 |
| 数学的リテラシー育成の場としての数学的活動の実現に向けて | 17 |
| 数学的な見方・考え方と数学的リテラシー | 20 |
| 1.4. おわりに：授業づくりの視点の再掲 | 22 |

第2章 事例編 23

| | |
|--------------------------------|----|
| はじめに：事例を読まれるに当たって | 24 |
| 事例の一覧 | 27 |
| 事例1 数学の事象を考察しながら豊かに学び直す事例 | 28 |
| 数当てゲームの仕組みを探ろう [数学Ⅰ・式の計算] | 28 |
| 事例1の解説 | 33 |
| 事例2 日常の事象を数学的に表現することのよさを感じ得る事例 | 36 |
| 企画が採用される票数を求めよう [数学Ⅰ・一次不等式] | 36 |
| 事例2の解説 | 39 |

| | | |
|------------|----------------------------------|----|
| 事例3 | 日常の事象を考察しながら生きて働く知識及び技能を習得する事例 | 42 |
| | はしご車はどこまで届く？ [数学Ⅰ・鋭角の三角比] | 42 |
| | 事例3の解説 | 47 |
| 事例4 | 数学を活用して日常の事象を考察する力を身に付ける事例 | 50 |
| | 販売価格はいくらにすればよい？ [数学Ⅰ・二次関数の最大と最小] | 50 |
| | 事例4の解説 | 56 |
| 事例5 | データに基づいて日常の事象を考察する力を身に付ける事例 | 58 |
| | 男女の記録の比べ方を考えよう [数学Ⅰ・分散と標準偏差] | 58 |
| | 事例5の解説 | 64 |
| 事例6 | 数学を活用して判断する力を身に付ける事例 | 66 |
| | どのような人が検査を受ける？ [数学A・いろいろな確率] | 66 |
| | 事例6の解説 | 71 |
| 事例7 | デジタルツールと論理を用いて問題発見する力を身に付ける事例 | 74 |
| | 三角形の「中心」の秘密を探ろう [数学A・三角形と比] | 74 |
| | 事例7の解説 | 80 |
| 事例8 | 論理的に考えることの楽しさやよさを感じ得る事例 | 82 |
| | 正直者を探そう [数学A・数学と人間の活動] | 82 |
| | 事例8の解説 | 85 |



第 1 章

理論編

1.1.

はじめに：高等学校数学科における
数学的リテラシー育成の必要性

OECD生徒の学習到達度調査（PISA）の2022年調査（以下「PISA2022」という。）の結果において、日本の義務教育修了段階の数学的リテラシーの平均得点は世界トップレベルにある。一方で、数学的リテラシーは、詳しくは後で確認するように、現在そして将来においてよりよい社会を形成する市民に必要な資質・能力としての位置付けを有しており、高等学校段階においてより一層の伸長が求められるべきものである。また、数学的リテラシーは、これも詳しくは後で確認するが、平成30年告示学習指導要領において育成を目指す「数学的に考える資質・能力」に含まれるものである。平成30年告示学習指導要領の前文には「…一人一人の生徒が、自分のよさや可能性を認識するとともに、あらゆる他者を価値のある存在として尊重し、多様な人々と協働しながら様々な社会的変化を乗り越え、豊かな人生を切り拓き、持続可能な社会の創り手となることができるようにすることが求められる」とあるが、数学的リテラシーのより一層の伸長は、まさに、一人一人の生徒が豊かな人生を切り拓き、持続可能な社会の創り手となっていくことに資するものである。したがって、数学的リテラシーの育成に課題のある生徒にはその対応を十分に図り、比較的高い水準にある生徒においては、その維持や向上を図っていく必要がある。日本全体で見ても、15歳段階で世界トップレベルにある数学的リテラシーが、高等学校段階において剥落してしまうような事態は避けねばならない。

高等学校数学科において数学的リテラシーのより一層の伸長を図っていくに当たっては、PISA2022から見えてきた課題を確認しておく必要がある。PISA2022からは、以下のことも明らかになっている。

- ▲日本の生徒は、OECD平均と比べて、例えば「実生活の課題にからませて、数学的な解を見つけること」や「実社会の問題の中から、数学的な側面を見つけること」といったことを含む「数学的推論と21世紀的な数学に関する課題」に対する経験が少なく、そうした課題を解決する自信が低い。
- ▲日本は、例えば「先生は私たちに、日常生活の問題を数学を用いてどのように解決できるかについて考えるように言った」「様々な話題がより大きな数学的な考えとどのように関係しているかをたずねた」などの質問項目から測られる「数学での認知の活性化（数学的思考力の育成）」指標では、OECD加盟37か国中36位である。
- ▲数学の授業でデジタル・リソースの利用が「まったく、又はほとんどない」と回答した生徒の割合が50%を超えている。
- ▲習熟度レベル¹別の生徒の割合において、レベル2以下の生徒の割合は20年間あまり変わっておら

1 習熟度レベルの説明については次節を参照。

ず、29%前後を推移している。

上記の結果がそのまま「課題」になるとは限らない。例えば1点目については、実生活の課題を数学を使って解決することの難しさを理解しているがゆえに自信が低いという生徒もいよう。ただ、一方で2点目からは、日本の高等学校数学科における授業では、数学と日常生活とからめた指導があまり行われていないことが示唆される²。平成30年告示学習指導要領における高等学校数学では、ほとんどの内容に「日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすること」を位置付けており、日常の事象や社会の事象の考察は既に付加的なものではなくなっている。数学は抽象的であるがゆえに応用範囲が広いという特性を有するが、だからといって、数学を抽象的に教えていれば生徒が実生活の課題に対して数学を使えるようになるわけではない。

3点目についても、数学という教科の特性上、すべての授業においてデジタル・リソースが活用されとは限らない。しかし、数学の授業でデジタル・リソースを利用することが「まったく、又はほとんどない」状態は、数学を豊かに学ぶ機会を逸していることが懸念される。デジタルツールが進展し、1人1台端末の整備が進む現在においては、デジタルツールを生徒一人一人が用いて、現実の世界を反映した問題を取り扱って社会や生活との関連を重視したり、実感を伴って数学を深く理解したりする学習が可能となっている。高等学校数学科では既に各科目に「コンピュータなどの情報機器を用いて～すること」という内容を位置付けていることを踏まえる必要がある。

対して、4点目は明確に課題であると言える。日本は確かに習熟度レベル1以下の低得点層が少ない傾向にあるが、それでも12%程度は存在し、レベル2以下と合わせると28%程度となり、この割合は2003年の調査以降、ほとんど変化していない。日本全体で見れば世界トップレベルにあるが、生徒一人一人に視点を移せば、数学的リテラシーが育成されていないがゆえに不利益を被りかねない生徒が一定数いる。これは次節において詳しく述べるように喫緊の課題である。

こうした課題に対し、一人一人の生徒が数学的リテラシーをより一層伸長していくための指導を検討する必要がある。以下では、PISA2022における数学的リテラシーの定義を確認することから始め、上記の調査結果の一部について掘り下げ、それを踏まえて数学的リテラシーを育成するための授業づくりの視点について検討する。続いて、数学的リテラシーの育成と学習指導要領との関係について確認し、数学的リテラシー育成の場としての数学的活動を通した学びの実現について検討する。

2 2点目は生徒質問調査の結果であるが、これは「今年度、数学の授業で、先生は次のようなことをどのくらいしましたか。」に対する回答に基づいている（詳しくは次節参照）。また調査の実施時期が6月から8月の時期であったことにも留意が必要である。

1.2. 数学的リテラシーを育むために

数学的リテラシーとは

まずは、数学的リテラシーについて確認する。PISA2022では、数学的リテラシーを次のように規定している。

数学的に推論し、現実世界の様々な文脈の中で問題を解決するために数学を定式化し、活用し、解釈する個人の能力のことである。それは、事象を記述、説明、予測するために数学的な概念、手順、事実、ツールを使うことを含む。

この能力は、現実社会において数学が果たす役割に精通し、建設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民に求められる、十分な根拠に基づく判断や意思決定をする助けとなるものである。

数学的リテラシーを、現在、そして、将来、よりよい社会を形成する市民に必要な資質・能力として位置付けていることに特徴がある。

PISA数学的リテラシー調査は、この数学的リテラシーの、各国・地域の15歳段階における習熟の状況を明らかにすることを目的としている。PISA2022の評価の枠組み（図1-2-1）は、社会の変化を踏まえ、これまでの枠組みから一部更新はなされたものの、数学的リテラシーを、「数学的な内容知識」、「文脈」、「数学的プロセス」の3つの側面から捉えるという点は継承されている。

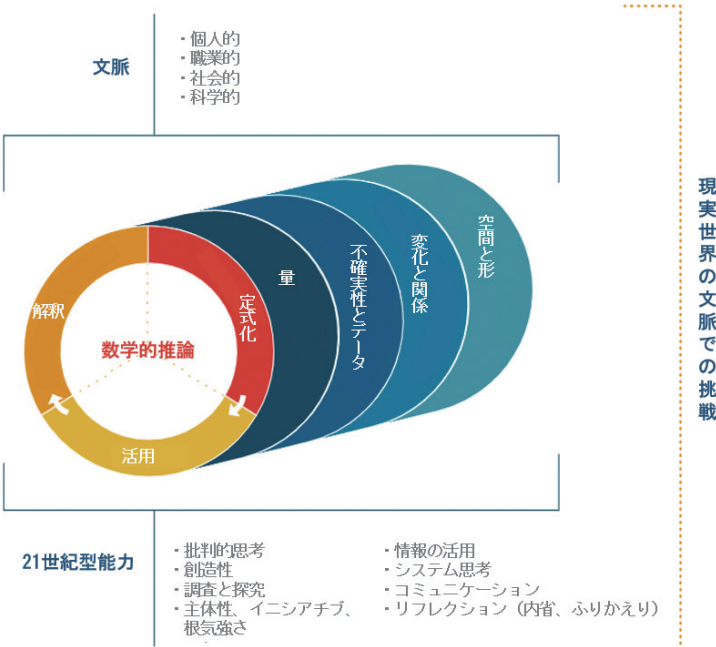


図1-2-1 数学的リテラシーの枠組み³

3 国立教育政策研究所(2024).生きるための知識と技能8 OECD生徒の学習到達度調査 (PISA) 2022年調査国際結果報告書.明石書店.p.57

数学的な内容知識は、「量」「不確実性とデータ」「変化と関係」「空間と形」、文脈は、「個人的」「職業的」「社会的」「科学的」からなる。この「科学的」には、現実世界の文脈と切り離された数学の問題も含まれる。

数学的プロセスは、現実の問題や状況を解決する際の「定式化」(Formulate)、「活用」(Employ)、「解釈」(Interpret & evaluate)の三つのプロセスと、これらの根底にある「数学的推論」(Mathematical reasoning)からなる。

このうち定式化は、現実世界の問題を解決するために、その根底にある数学的概念や考え方を認識・識別し、その問題に数学的構造を与えること、換言すれば、数学の問題として表したり数学的モデルを作成したりすることである。例えば次のような問題場面を考えてみよう。

体育館で、2人ずつが対戦する『ビーチフラッグ』のトーナメントをすることになった。そのために、スタート地点と旗の位置を決めたい。2人のスタート地点から旗までの距離は等しくなければならない。

これは現実世界の問題である。これを、平面図で、スタート地点や旗の位置を点とみなして考えようとするのが定式化（数学化⁴）にあたる。定式化した数学の問題（数学的に表現した問題）は、例えば、

スタート地点を S_1 , S_2 , 旗の位置を F とし, $FS_1=FS_2$ を満たす3点の位置の決め方を考えよ。

となる。先に F の位置を決め条件を満たす S_1 , S_2 の位置を探す、あるいは、先に S_1 , S_2 の位置を決め条件を満たす F の位置を探すことが考えられる。このそれぞれが焦点化した問題である。前者は、 F を中心とする円周上、後者は線分 S_1S_2 の垂直二等分線になる。この結果を、体育館の大きさや形状を加味し意味付けることで『ビーチフラッグ場』が設計できる。

続いて活用は、数学的に定式化された問題や数学的モデルに対して、適切な数学的手段を活用し、数学的結論を得ることである。上記の例でいえば、焦点化した問題に対して F を中心とする円を作図したり、線分 S_1S_2 の垂直二等分線を作図したりすることが該当する。解釈は、得られた数学的結論を、もとの現実世界の問題の文脈に戻して解釈し、妥当かどうか、理にかなっているかどうか等を判断することである。これは体育館の大きさや形状、競技としての面白さなどを加味し意味付けることに該当する。

数学的推論は、PISA2022で新たに加わったもので、上述の三つのプロセスのいずれにおいても、すなわち、問題解決のプロセス全体を通して行うものである。演繹的推論と帰納的推論があり、数学的な概念、ツール、論理を用いて、現実の問題や状況を概念化し、解決策を生み出すこと、自分の解答や解決策を支持し説明するために論理(arguments)を組み立て、証拠を提供すること、問題に内在

4 この「数学化」は後で登場する「数学の問題発見・解決の過程」における語である。この後の「数学的に表現した問題」と「焦点化した問題」も同様。

する数学的性質を認識し、それを解決するための戦略を立てること、どのような戦略に従うべきかの決定を含め、自分自身の思考プロセスに対する認識を発展させること、関連する情報と関連しない情報を区別すること、論理的な結論を導き出すこと、解決策が実社会の文脈でどのように適用できるかを認識することなどが含まれる、とされている。

なお、図1-2-1にある「21世紀型能力」(21st Century Skills)は、数学的リテラシーの枠組みに含めるべき能力として特定されたものである。ただし、PISA2022では、特にこれらに沿った問題開発はされていない。

PISA2022からみた日本の数学教育の成果と課題

PISAでは、項目反応理論等を用いて一人一人の生徒の得点を推定し、習熟度レベル別（PISA2022ではレベル1c未満からレベル6以上までの9段階）に分けている。日本は、国際的にみると、一貫して習熟度レベルの高い生徒が多い国の一つである。その一方で、日本の15歳児の習熟度レベル別の割合の経年変化（図1-2-2）を見ると、過去20年間、レベル1以下とレベル2の生徒の割合がほとんど変化していないこともわかる。

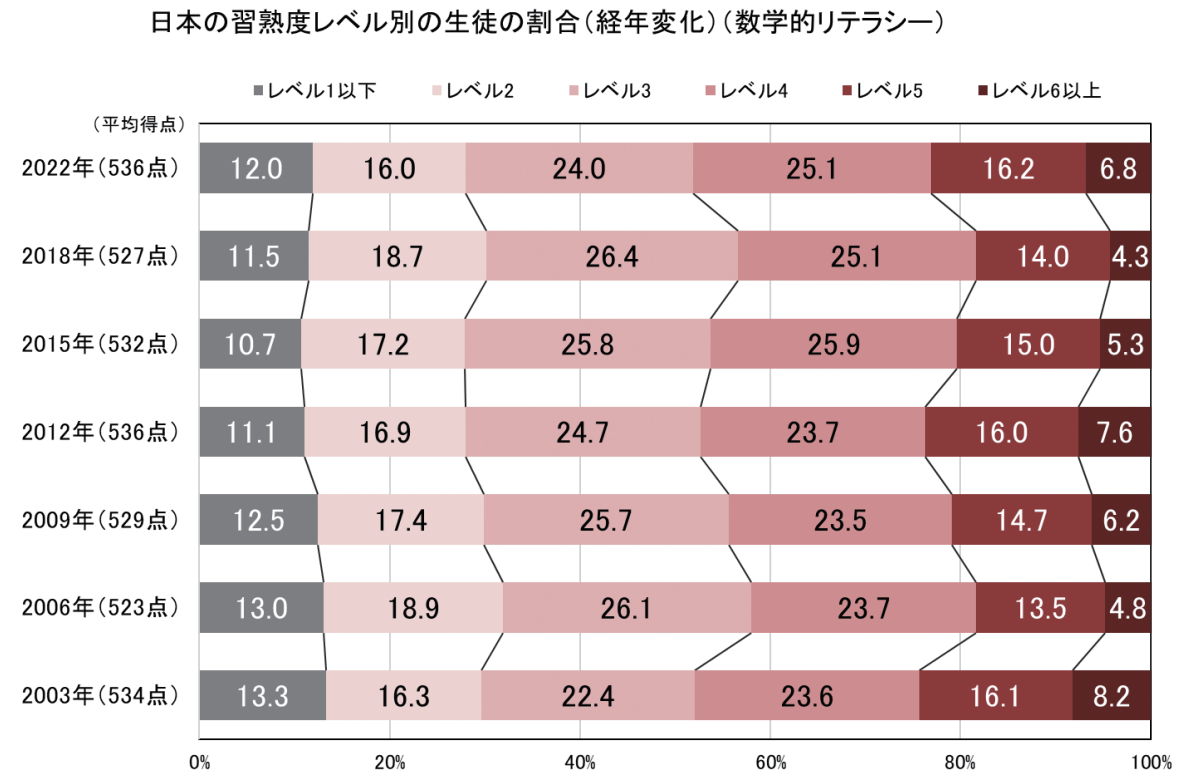


図1-2-2 日本の習熟度レベル別の生徒の割合（経年変化）⁵

5 国立教育政策研究所(2024).生きるための知識と技能8 OECD生徒の学習到達度調査 (PISA) 2022年調査国際結果報告書.明石書店.p.80

例えばレベル1a（レベル1の中の最上位）の生徒の特徴は、「必要な情報がすべて提示され、質問が明確に定義されている場合に、簡単な文脈の間に答えることができる」、「明確な状況において、直接的な指示に従い、単純で日常的な手順を実行することができる」、「決まり切った行動や、最小限の情報の統合しか必要としない行動はとることができるが、どのような場合でも、与えられた課題文から直接的に導かれる行動をとる」などと説明されている⁶。換言すれば、問題の解決策を自分で考案したり、批判的思考の側面から取り組んだりすることは難しいということである。

数学的リテラシーが「建設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民」に必要な能力であるという点からは、レベル1以下及びレベル2の生徒が、社会の中で不利益やリスクを被りうる場面や、さらには意思決定を要する場面などで、データや数学的モデルに基づく主張を批判的に検討することができず、言われたことをただ受け入れるか、反対の意を唱えるだけになってしまうことが危惧される。「誰一人取り残すことのない持続可能で多様性と包摂性のある社会」⁷や、「社会の分断や格差を防ぎ、他者への信頼に基づく民主的で公正な社会」⁸の形成に主体的に関与できる市民の育成という点からは、この状況の改善は喫緊の課題である。

また、PISAでは、数学の学習に関わる質問調査も実施している。図1-2-3は、PISA2022の生徒質問調査の中の「数学的推論と21世紀的な課題」に関する質問である。

- 図、グラフ、シミュレーションから、数学的な情報を見つけ出すこと
- 実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること
- 何か決定を行うときに、統計上のばらつきの考え方をを用いること
- 実社会の問題の中から、数学的な側面を見つけること
- 数学的モデルの背景にある条件や仮定が分かること
- 変数、記号、あるいは図表を用いて状況を数学的に示すこと
- データで観測された傾向の重要性を評価すること
- コンピュータでコーディングやプログラミングをすること
- コンピュータの数学的機能（例：表計算ソフト、プログラミング・ソフト、グラフ電卓）を使うこと
- 不規則な形をした物の性質に関する量を計算して求めること

図1-2-3 「数学的推論と21世紀的な課題」の質問項目

このような活動を強調している背景には、社会における判断や意思決定において、その重要性が一層増していることがある。例えば、コンピュータや数学的モデルに基づく結果に対して過度な一般化が主張された際に、それを疑うこと（数学的モデルの背景にある条件や仮定が分かること）は、「建

6 国立教育政策研究所(2024).生きるための知識と技能8 OECD生徒の学習到達度調査 (PISA) 2022年調査国際結果報告書.明石書店.p.60

7 令和3年1月 中央教育審議会『「令和の日本型学校教育」の構築を目指して～全ての子供たちの可能性を引き出す、個別最適な学びと、協働的な学びの実現～（答申）』p.16

8 令和5年 12月28日中央教育審議会初等中等教育分科会 個別最適な学びと協働的な学びの一体的な充実に向けた学校教育の在り方に関する特別部会 義務教育の在り方ワーキンググループ「義務教育の在り方ワーキンググループ中間まとめ」p.13

設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民」に必要な能力である。

中でも注目すべき点の第一は、コンピューショナル思考(computational thinking)に関わる活動である。PISA2022では、コンピューショナル思考を先行研究に基づいて「コンピュータ、人間、またはその両者の組み合わせによって実行可能な形に問題を定式化し、その解決策をデザインすることに伴う思考プロセス」とし、上述の数学的推論の一部として位置付けている。具体的には、数学的リテラシーには、シミュレーションや数学的モデルを理解し、評価し、そこから意味を引き出す能力が含まれるとしている。その能力には、入力を変化させて、結果にもっとも影響を与えるパラメータを探ることや、ランダム性の導入なども含まれる。

注目すべき点の第二は、統計上のばらつきに関わる活動である。統計学の中心的な特徴であるばらつきを理解することもまた、数学の実世界での応用に関する推論をサポートする。すなわち、データから得られた値やそれに基づく結論に対して、とりうる値の範囲の考慮や確率的な判断をしながら、データに基づく議論に参加することが重要視されている。

このような背景のある図1-2-3の活動を学校でどのくらいしたかに関する日本の指標（OECD平均が0.0、標準偏差が1.0となるように標準化）は-0.17で、参加国・地域中で10番目に低い。また、それらを行うことに対する「自信」に関する日本の指標は-0.40であり、参加国・地域中で最も低い。

さらに、生徒に対して、数学の授業に関する質問もなされている。その結果からは、日本の数学の授業は規律がよく（OECD加盟国中第1位）、教師からのサポートを受けていると感じられている（同第8位）ことが明らかになっている。その一方で、数学的思考力の育成に関わる「数学での認知の活性化」は、下位から2番目である。それは「今年度、数学の授業で、先生は次のようなことをどのくらいしましたか。」の下位項目である図1-2-4の九つの項目のそれぞれについて、生徒が「すべての授業、又はほとんどすべての授業」「授業の半数以上」「授業の半数程度」「授業の半数以下」「まったく、又はほとんどない」の五つの選択肢から一つを回答した結果に基づくものである（図1-2-5）。高等学校第1学年の6月上旬～8月上旬に実施されており、生徒が「今年度」をどのように解釈したかは不明であるものの、日本の数学の授業に対する生徒の受け止めを知る上での重要な資料である。

- 先生は私たちに、新しく学んだ数学の知識で解決できる日常生活の問題とはどういうものかを考えるように言った
- 先生は私たちに、日常生活で数学がどのように役立つかを示してみせた
- 先生は私たちに、「数学的に考える」ように勧めた
- 先生は私たちに、新たな状況に取り組む時に数学的な論理をどう用いるかについて教えた
- 先生は私たちに、数の表し方を理解することで、難しそうにみえる問題をどのようにすればより簡単に解決できるかを示した
- 先生は私たちに、数に関わる日常生活の問題をあたえて、その状況に関して判断をするように言った
- 先生は私たちに、様々な話題がより大きな数学的な考えとどのように関係しているかをたずねた
- 先生は私たちに、日常生活の問題を数学を用いてどのように解決できるかについて考えるよう

に言った

- 先生は、様々な数学的な考えがより大きな現象とどのように関係しているかを説明した

図1-2-4 「数学での認知の活性化」の質問項目

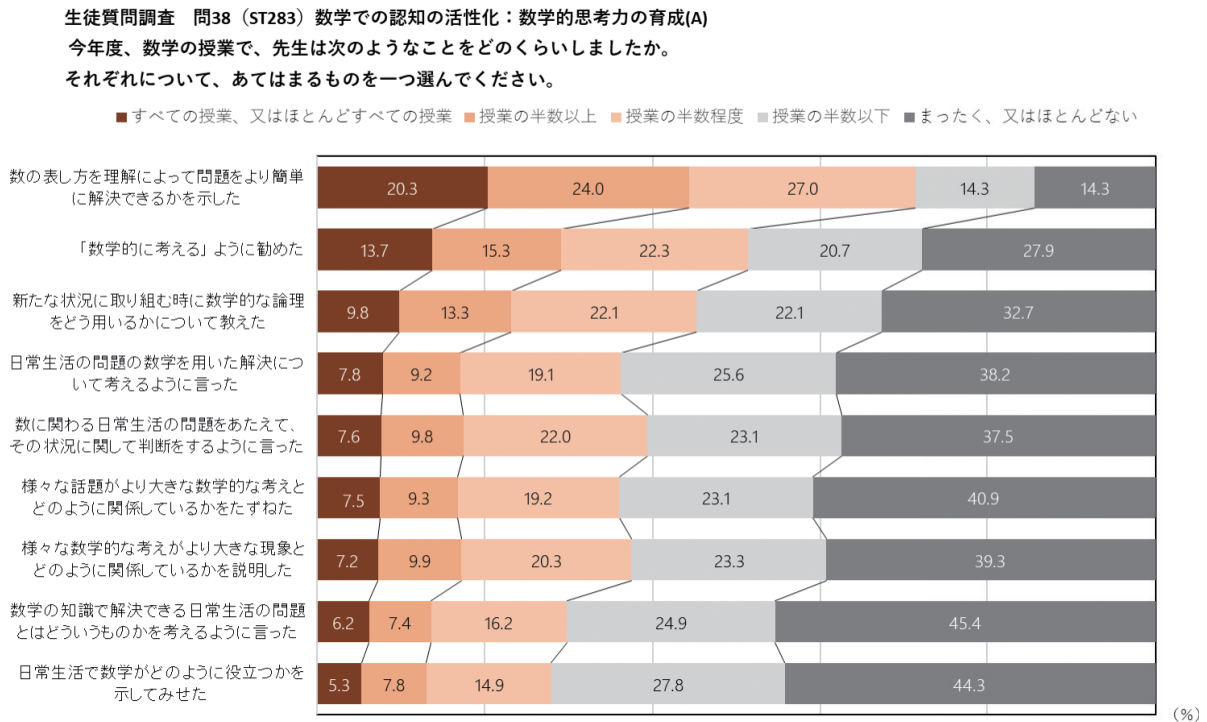


図1-2-5 「数学での認知の活性化」の日本の結果⁹

数学的リテラシーを育むための視点

PISA2022からみた日本の数学教育の課題には、小学校算数科や中学校数学科における学習指導も大きく関わる。その一方で、上述の結果からは、高等学校にも相当数の数学的リテラシーの習熟が不十分な生徒がおり、その改善を図ることが高等学校にとっての課題となっていることがわかる。もちろん、習熟度レベルの高い生徒が大半を占める高等学校もあるだろうが、そのような学校においても、これからの日本社会における「建設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民」にはどのような数学的リテラシーが必要かを念頭におき、生徒の数学的リテラシーを、高等学校数学の学びとリンクした卓越したものへと高めていくことは、個人はもとより社会のウェルビーイングの実現にとって重要な意味をもつ。

このような点を踏まえつつ、多くの生徒の数学的リテラシーを育成・伸長するための授業づくりの

9 国立教育政策研究所(2024).生きるための知識と技能8 OECD生徒の学習到達度調査 (PISA) 2022年調査国際結果報告書.明石書店.p.173

視点として、次の三つを挙げる。

●生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場の創出

実社会において数学的リテラシーを働かすことができるようにすることは、PISAの調査問題で正答を得られるようにすることより高次のことである。その育成・伸長の基盤は、生徒が解決の必要性を感じ、主体的に数学的に推論することにある。そこで、授業では、提示する問題や場面を工夫するとともに、生徒の対話を通して、生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場を創出することが重要となる。その際、数学的リテラシーの「文脈」の「科学的」には数学の問題も含まれることや、数学的推論は現実世界の問題、数学の問題の解決の双方に関わるものであることに留意が必要である。特に、現実世界の問題の扱いでは、理科や情報科といったSTEM関連教科との教科横断的な学習はもちろんのこと、地歴公民科、家庭科、保健体育科なども視野に入れることで、文理融合の学習機会にもなる。このことは、数学的リテラシーに近接するデータリテラシー、デジタルリテラシーの育成・伸長にもつながることである。

●豊かな学び直しの機会の設定

習熟度レベル2以下の生徒の多くは、中学校や高等学校の数学の学習を進める中でも、既習事項に対するフォローが必要になっていると考えられる。そのようなフォローは、当該の数学の学習をするために必要な知識や技能面に焦点が当てられることが多い。しかし、そのような知識や技能面に焦点化した学習を重ねても、実社会の文脈で活用できるようになっていかない、すなわち、数学的リテラシーの習熟に結びつかないことが、これらの生徒に見られる傾向である。

そこで、既習内容に関わる数学的リテラシーの習得を主目標とする学び直しの機会を設定する。その授業では、先に挙げた、生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場を創出するとともに、多様な考えを取り上げ、それらを比較検討し、対話を通して最終的な結論を得ること、さらに、それらの過程を振り返り、わかったこと、わからなかったことなどを明確にすることを大切にしたい。

●生徒の思考の多様性への対応：デジタルツールの利用

ある問題場面に対して、数学に関するデジタルツールを利用し、シミュレーションを実行したり、数学的モデルを操作したりするアプローチもあれば、数学の演繹的な考察のみを駆使するアプローチもある。社会の変化に伴い、前者の有用性や有効性が相対的に高まっていることを踏まえ、生徒に、この両者を経験させることはもちろんのこと、最終的には、どちらのアプローチをするかを自立的に判断できるようにしたい。そのような判断も数学的リテラシーの一部だからである。

1.3. 高等学校学習指導要領と 数学的リテラシー

本節では、ここまで述べてきたことと平成30年告示高等学校学習指導要領第4節数学との関係について整理し、高等学校数学の指導上の留意点に言及する。

高等学校数学科の目標と数学的リテラシーの育成

まず、高等学校数学科の目標は以下のとおりである。これは、高等学校数学科として育成を目指す「数学的に考える資質・能力」を、「知識及び技能」、「思考力、判断力、表現力等」、「学びに向かう力、人間性等」の三つの柱から整理したものとなっている。

数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す。

- (1) 数学における基本的な概念や原理・法則を体系的に理解するとともに、事象を数学化したり、数学的に解釈したり、数学的に表現・処理したりする技能を身に付けるようにする。
- (2) 数学を活用して事象を論理的に考察する力、事象の本質や他の事象との関係を認識し統合的・発展的に考察する力、数学的な表現を用いて事象を簡潔・明瞭・的確に表現する力を養う。
- (3) 数学のよさを認識し積極的に数学を活用しようとする態度、粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度や創造性の基礎を養う。

この目標における「数学的活動」に着目する。数学的活動とは、『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編 理数編』（以下「解説」という。）では、「事象を数理的に捉え、数学の問題を見だし、問題を自立的、協働的に解決する過程を遂行すること」とであるとしている。これは、従前の学習指導要領解説で述べられていた「数学学習に関わる目的意識をもった主体的な活動」と本質的には変化していない。特に、高等学校数学科における各科目の指導に当たっては、次のような数学的活動に取り組むものとしている（高等学校学習指導要領第2章第4節第3款3）。

- (1) 日常の事象や社会の事象などを数理的に捉え、数学的に表現・処理して問題を解決し、解決の過程や結果を振り返って考察する活動。
- (2) 数学の事象から自ら問題を見だし解決して、解決の過程や結果を振り返って統合的・発展的に考察する活動。

(3) 自らの考えを数学的に表現して説明したり，議論したりする活動。

上記 (1) と (2) の活動は，図1-3-1のイメージ図で考えることができる。

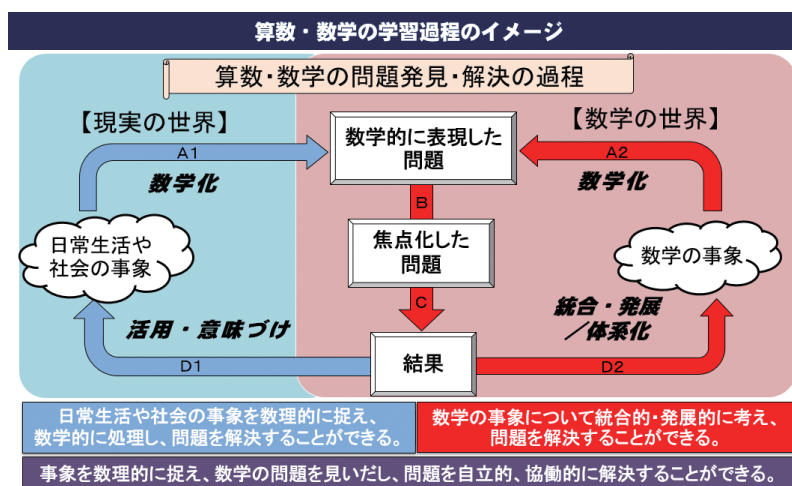


図1-3-1 数学の問題発見・解決の過程

上記 (1) は $A1 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D1$ のサイクルを表し，(2) は $A2 \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D2$ のサイクルを表していると捉えられる。ただし，これら2つの過程は相互に関わり合って展開されること，また，すべての数学的活動がA1やA2から始まるわけでもないことに留意が必要である。

いずれにせよ，「数学的に考える資質・能力」を育成していくためには，数学的活動を通した学びが不可欠であることを踏まえることが大切である。このことは，上の目標に挙げられている「数学的に考える資質・能力」が，図1-3-1の「数学の問題発見・解決の過程」を遂行するための力であると捉えると理解しやすい。「数学の問題発見・解決の過程」を遂行するための力なのであるから，その過程を実際に経験し，その経験を振り返って意識してこそ，それらの力を身に付けていくことが可能となる。

以上のことを踏まえると，1.2節で述べてきたことと平成30年告示高等学校学習指導要領第4節数学は，次のような点で整合していると考えられる。

- PISA2022の枠組みでは新たに数学的推論が強調されたことで，「数学の問題発見・解決の過程」と整合性が増した。PISAの枠組みの「数学的プロセス」は，図1-3-1の左半分にあたる一方，数学的推論に関する資質・能力は，右側のサイクルでも育成・伸長することができる。
- 高等学校数学科では，「事象を数学化したり，数学的に解釈したり，数学的に表現・処理したりする技能」を身に付けることや，「数学を活用して事象を論理的に考察する力」を養うこと，「粘り強く考え数学的論拠に基づいて判断しようとする態度」を養うことなど，数学的リテラシーに該当する資質・能力の育成を既に目標に据えている。つまり，数学的リテラシーを育成・伸長することは，高等学校数学科の目標の一環であるといえる。各内容において，数学的リテラシーに該当する資質・能力を意識的に授業の目標に掲げ，指導していくことが大切である。

- 数学的活動は「数学学習に関わる目的意識をもった主体的な活動」であるから、生徒が目的意識をもてるようにすることが大切である。これは、前節で強調した「生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場の創出」に他ならない。
- 「数学の問題発見・解決の過程」は数学の「学習過程」である。すなわち、多様なすべての生徒が数学的活動を通した学びにアクセスできなくてはならない。そのために、前節で強調した「豊かな学び直しの機会の設定」及び生徒の多様な思考に対応する「デジタルツールの利用」が大切になってくる。関連して、1.1節でも述べたように、高等学校数学科では各科目に「コンピュータなどの情報機器を用いて～すること」という内容を既に位置付けていることにも留意が必要である¹⁰。

なお、数学Bには「数学と社会生活」という内容が位置付けられているが、これは数学的リテラシーを念頭に置きながら、社会生活等における問題を解決するための資質・能力を養う内容であることを付言しておく。

数学的リテラシー育成の場としての数学的活動の実現に向けて

先述したように、数学的リテラシーの一つの側面である「数学のプロセス」は、「数学の問題発見・解決の過程」に包含されている。各内容において数学的活動を通した学びを実現していくことが、数学的リテラシーを育成・伸長することになる。換言すれば、数学的リテラシーを育成・伸長するための授業は、必然的に数学的活動を通した学びの場となる。数学的活動の場において、1.2節における「数学的リテラシーを育む視点」を意識し、生かしていくことが大切となる。そこで、こうした数学的活動を通した学びを実現することに向けて、以下では次の3点に絞って強調しておきたい。

第1に、数学的活動を通した学びは、単元末等に限らず、通常の授業において充実を図っていくものだということである。「解説」では、課題学習の箇所に次の記述がある（p.49）。

通常の授業においても生徒の「主体的・対話的で深い学び」として数学的活動を充実させていくことが求められており、課題学習ではその実現を一層図ることにねらいがある。

数学的活動を通した学びというと、知識及び技能の「活用」に特化し、何らかの特別な教材を用意する必要のある、年にそう何回もできないような学びであるかのように捉えられることがある。しかしそうではない。上でも記したように、「数学の問題発見・解決の過程」は数学の「学習過程」である。生徒が日々の通常の授業において数学学習に関わる目的意識をもち、生きて働く「知識及び技能」を身に付け、未知の状況に対応できる「思考力、判断力、表現力等」を養い、同時に学びを人生や社会に生かしていこうとする「学びに向かう力、人間性等」を少しずつ養って（涵養させて）いくことが大切である。通常の授業でこうした数学的活動を通した学びを充実させてこそ、課題学習においても

10 参考：GIGAスクール構想のもとでの高等学校数学科の指導について
https://www.mext.go.jp/a_menu/shotou/zyouhou/mext_00005.html#kou

数学的活動を通した学びの実現を図っていくことが可能になると考えられる。

第2に、上述のように単元末等に限らず、通常の授業において数学的活動の充実を図っていくに当たっては、生徒が「数学の問題発見・解決の過程」を遂行するなかで、既習の「知識及び技能」を活用あるいは学び直しをしながら、生徒自身が新たな「知識及び技能」を創出していくような学びも計画することである。「解説」に次の記述がある（p.9、下線は引用者）

生徒が、目的意識をもって事象を数学化して自ら問題を設定し、その解決のために新しい概念や原理・法則を見いだしたり学んだりすることで、概念や原理・法則に支えられた知識及び技能を習得したり、思考力、判断力、表現力等を身に付けたり、統合的・発展的、体系的に考えて深い学びを実現したりすることが可能となる。

高等学校数学科の指導では、まずは「知識及び技能」について説明し、生徒がある程度習熟してきたらその活用場面に取り組みせるといった指導が想定されやすい。一方で、数学では既習の「知識及び技能」を基にして新たな「知識及び技能」が創出されることを踏まえると、まずは生徒が事象に直面し、その問題発見・解決に取り組む過程において、既習の「知識及び技能」を活用あるいは学び直しをしながら、そこでの素朴な活動を基に数学的な見方・考え方を働かせて、新たな「知識及び技能」を創出し、習得していくことも考えられる。

例えば、数学Ⅰ「図形と計量」で、生徒が余弦定理を未習の状態、2辺の長さとその間の角度がわかっている鋭角三角形のもう1辺の長さを求めることに直面するときを考える（例として図1-3-2）¹¹。このときの解決方法として、角度がわかっている角が含まれるように頂点（図1-3-2でいえばBかC）から垂線を下ろして直角三角形を作り三平方の定理を用いることが考えられるが、ここでは鋭角の三角比を活用していることになる。そして、同様の活動を一般の三角形に対して行う（一般化という数学的な見方・考え方を働かせる）ことで、新たな「知識及び技能」としての余弦定理が導かれる。このようにして創出された余弦定理は、自ずと三角形の決定条件や三平方の定理と関連付き、どのような条件において有効な定理であるかも含めて理解されることが期待できる。このように、「知識及び技能」は身に付ける過程の質によって個々の生徒が得るその質が決まることから、「思考力、判断力、表現力等」とともに習得されるものであることに留意する必要がある（「解説」p.33）。

なお、このとき、生徒が鋭角の三角比に習熟していないので活用ができないという懸念もあるかも

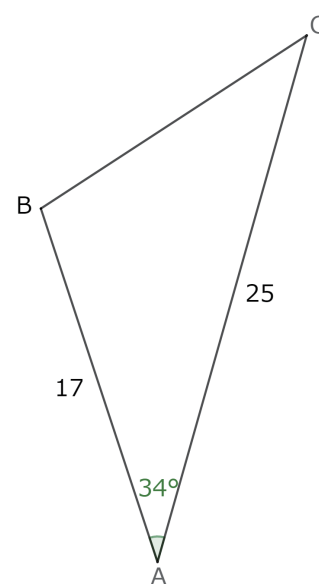


図1-3-2

11 『中等教育資料』令和6年7月号では、七夕の話題からベガとアルタイルの距離を求める問題を見だし、それらに取り組みながら余弦定理を導く実践を紹介している（p.33）。「ベガとアルタイル間の距離を求める」という現実世界の問題からすると、「2辺とその間の角度の値（具体的には17, 25, 34°）からもう1辺の長さを求める」という問題は「数学的に表現した問題」に該当する。

しれないが、むしろここで生徒が鋭角の三角比を学び直していると捉えることが大切である。鋭角の三角比を学んでいるときにはその意味やよさがわからなかった生徒も、このように計量に用いることによって、それが少しずつわかっていくことを期待できる。「知識及び技能」の習得に課題が見られる場合には、それを身に付けるために、生徒の主体性を引き出すなどの工夫を重ねる必要がある（「解説」pp.129-130）が、数学的活動において既習の「知識及び技能」を活用することによって学び直し場を生み、その活動を通して習得を図っていくこともその工夫の一つだと考えられる。これが「豊かな学び直しの機会を設定する」ことの一つのイメージである。

そして第3に、数学的活動を通した学びは、単元など内容や時間のまとまりを見通して実現を図るものということである。平成30年告示学習指導要領第2章第4節第3款1(1)では、次の事項に配慮するものとしている（「解説」p.129、下線は引用者）。

単元など内容や時間のまとまりを見通して、その中で育む資質・能力の育成に向けて、数学的活動を通して、生徒の主体的・対話的で深い学びの実現を図るようにすること。その際、数学的な見方・考え方を働かせながら、日常の事象や社会の事象を数理的に捉え、数学の問題を見いだし、問題を自立的、協働的に解決し、学習の過程を振り返り、概念を形成するなどの学習の充実を図ること。

数学的活動を通した学びというと「そんなに時間をかけられない」という声を耳にすることもあるが、そもそも数学的に考える資質・能力は「単元など内容や時間のまとまり」（以下「単元」¹²という。）を見通して育成するものである。従って、単元の目標を明確化し、扱う問題などを精選し、時に教科書の構成とは指導順序を入れ替え、どこでどのように時間をかけるか（どこに時間をかけないか）を明確にするといった検討や工夫を行う単元デザインが大切になる。

12 ここでの単元とは、一定の目標や主題を中心として組織された学習内容の有機的なまとまりのことであり、高等学校数学科では概ね教科書の「節」の範囲を想定している。

数学的な見方・考え方と数学的リテラシー

最後に、改めて高等学校数学科の目標に戻ると、その柱書には「数学的な見方・考え方を働かせ、数学的活動を通して、数学的に考える資質・能力を次のとおり育成することを目指す」とある。「見方・考え方」は「どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考していくのか」というその教科等ならではの物事を捉える視点や考え方であり、各教科等の「学びの深まりの鍵」とされている（「解説」p.130）。「解説」では、「数学的な見方・考え方」は、数学の学習において、どのような視点で物事を捉え、どのような考え方で思考を進めるのかという、事象の特徴や本質を捉える視点、思考の進め方や方向性を意味することと考えられるとしている（p.23）。また、「数学的な見方」は「事象を数量や図形及びそれらの関係についての概念等に着目してその特徴や本質を捉えること」、「数学的な考え方」は「目的に応じて数、式、図、表、グラフ等を活用しつつ、論理的に考え、問題解決の過程を振り返るなどして既習の知識及び技能を関連付けながら、統合的・発展的に考えたり、体系的に考えたりすること」であると考えられるとして、「数学的な見方・考え方」は、「事象を、数量や図形及びそれらの関係などに着目して捉え、論理的、統合的・発展的、体系的に考えること」として整理できるとしている（p.24）¹³。こうした「数学的な見方・考え方」について、数学的リテラシーの育成・伸長の側面からは、少なくとも次の2点を踏まえておきたい。

まず、数学的な見方・考え方は、PISA2022の枠組みでいえば、「数学的プロセス」において生徒が働かせるものだと思えることである。例えば、「文脈」（個人的、職業的、社会的、科学的）のある問題場面において、数量や図形及びそれらの関係などに着目するからこそ「定式化」を進めることができる。また、方程式や関数に表現できれば数学的に処理できるという思考の進め方や方向性を有するからこそ、「定式化」やその後の「活用」（Employ）が進展する。

次に、上記のように数学的プロセスにおいて働く数学的な見方・考え方を生徒が意識できるようにすることである。そうすることで、以前は着目できなかった数量や図形及びそれらの関係などが視野に入るようになり、思考の進め方や方向性自体が豊かになるといったように、問題発見・解決の経験を次に生かしていくことが可能となる。そのためには、例えば生徒が無意識的に働かせていた数学的な見方・考え方を意図的に取り上げてその意識化を生徒全員に促したり、まだあまり備わっていない数学的な見方・考え方を生徒と対話をしながら引き出して成長させていったりする（例えば、2辺の長さとその間の角度がわかっている具体的な鋭角三角形においてもう1辺の長さを求めた後に、生徒から一般化したいという考え方を引き出して実践する）必要がある。そして、まさにそうした授業場面こそが、「学びの深まり」が生じている場面に他ならない。授業において数学的リテラシーを育成・伸長するに当たっては、当該授業で生徒が働かせうる数学的な見方・考え方をまずは教師が意識し、それを生徒が授業において意識することに向けた、学びを深める工夫を施していくことが大切になる。

なお、学びを深める工夫は、まずは数学的な見方・考え方を意識した教材研究があつてこそ生まれ

13 ただし、『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 総則編』において、「各教科等の解説において示している各教科等の特質に応じた『見方・考え方』は、当該教科等における主要なものであり、『深い学び』の観点からは、それらの『見方・考え方』を踏まえながら、学習内容等に応じて柔軟に考えることが重要である」とされている点に留意が必要である（p.118）。

てくるものであることは強調してもしすぎることはない。例えば、授業で扱う数学の内容は、どんな事象をどのような視点で捉え、どのような方向に向かってどのように考えることで創り出されてくるものなのか。授業で生徒が取り組むことになる問題の解決過程は、問題のどこに着目し、どのように考えるから進展するのか。また、そのように働かせる必要のある数学的な見方・考え方に対して、現在の生徒はどんな状態にあるか。授業で扱う問題に対する生徒の反応を予想するとき、それらの反応は、生徒が事象や問題をどのような視点で捉え、どのように考えたから生じるものだと考えられるか。こうした検討があつてこそ、教師が意図する数学的な見方・考え方を生徒が働かせていくための場、発問、手立てなどの設定、すなわち学びを深める工夫が見いだされてくると考えられる。

1.4. おわりに：授業づくりの視点の再掲

理論編のまとめとして、数学的リテラシーを育成・伸長するための授業づくりの視点や生徒の学びの実現に向けたポイントを再掲しておく。

1.2節では、高等学校の多様性を踏まえつつ、多くの生徒の数学的リテラシーを育成・伸長するための授業づくりの視点として、次の3点を挙げた。

- 生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場の創出
- 豊かな学び直しの機会の設定
- 生徒の思考の多様性への対応：デジタルツールの利用

このうち1点目は、平成30年告示学習指導要領でいうと、数学的活動を通した学びの実現に他ならない。先述したように、PISAの枠組みの「数学的プロセス」は、数学的活動として捉える「数学の問題発見・解決の過程」(図1-3-1)の左側のサイクルにあたる一方、数学的推論に関する資質・能力は、右側のサイクルでも育成・伸長することができる。数学的リテラシーの育成・伸長に向けて、数学的活動を通した学びを実現していくに当たっては、次の点に留意する必要がある。

- ▶数学的活動を通した学びは、単元末等に限らず、通常の授業において充実を図っていくものである。
- ▶一人一人多様なすべての生徒が数学的活動を通した学びにアクセスできることが大切であり、そのためにも「豊かな学び直しの機会の設定」及び生徒の多様な思考に対応する「デジタルツールの利用」が有効である。
- ▶数学的活動を通した学びは、単元など内容や時間のまとまりを見通して実現を図るようにするものであり、そのための単元デザインが大切である。
- ▶既習の「知識及び技能」を活用あるいは学び直しをしながら、生徒自身が新たな「知識及び技能」を創出していくような学びも検討する。
- ▶数学的プロセスにおいて生徒が働かせうる数学的な見方・考え方をまずは教師が意識し、それを生徒が授業において意識することに向けた、学びを深める工夫を検討する。

上記の視点や留意点を第2章の事例編に反映している。ただし、これらの視点や留意点は大切な点を前面に出したものであり、網羅的というわけではない。これらの点や第2章の事例を参考にしつつ、生徒の実態を踏まえ、創意工夫を生かした教育活動を積極的に展開されたい。



第 2 章

事例編

はじめに：事例を読まれるに当たって

事例編では、第1章の理論編を踏まえ、数学的活動を通した学びの充実を図り、数学的リテラシーの育成・伸長に資する8つの多様な事例を示す。これらの事例は、以下のⅠ～Ⅴのように整理できるものであり、対応する科目は必修科目である数学Ⅰか多くの高校生が履修している数学Aのいずれかである。

- Ⅰ) 「豊かな学び直しの機会の設定」を意識した事例〔事例1, 事例3〕
- Ⅱ) 事象に直面し、その問題発見・解決に取り組む過程において、既習の「知識及び技能」を活用あるいは学び直しをしながら、生きて働く新たな「知識及び技能」を習得する事例〔事例3〕
- Ⅲ) 教科書等にある題材に取り組みながら、数学を活用して日常の事象を考察する力を身に付ける事例〔事例2, 事例4, 事例6〕
- Ⅳ) 日常や社会の事象について不確実性やデータに基づき判断や意思決定する力を身に付ける事例〔事例5, 事例6〕
- Ⅴ) 数学の世界における事象の問題発見・解決に取り組み数学的に推論する力を高める事例〔事例7, 事例8〕

各事例の構成

本時の問題

.....

本時全体を通じて生徒が取り組む問題をまとめて示している。教師の問題の提示の仕方等は、事例によって異なることに留意されたい。

本時の問題の後には、基本的な情報として、次の3点の対応を示してある。

●平成30年告示学習指導要領との対応

.....

●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

.....

●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

.....

「数学の問題発見・解決の過程」(図2-0-1¹⁴)における重点化は、各事例で図のA1からD2までのどの過程に重点をおいているかを示している。1.3節で記したように、「数学の問題発見・解決の過程」

を遂行することが数学的活動であるが、単位授業時間でこれらの過程の全てを学習することを求めるものではないことに留意が必要である。

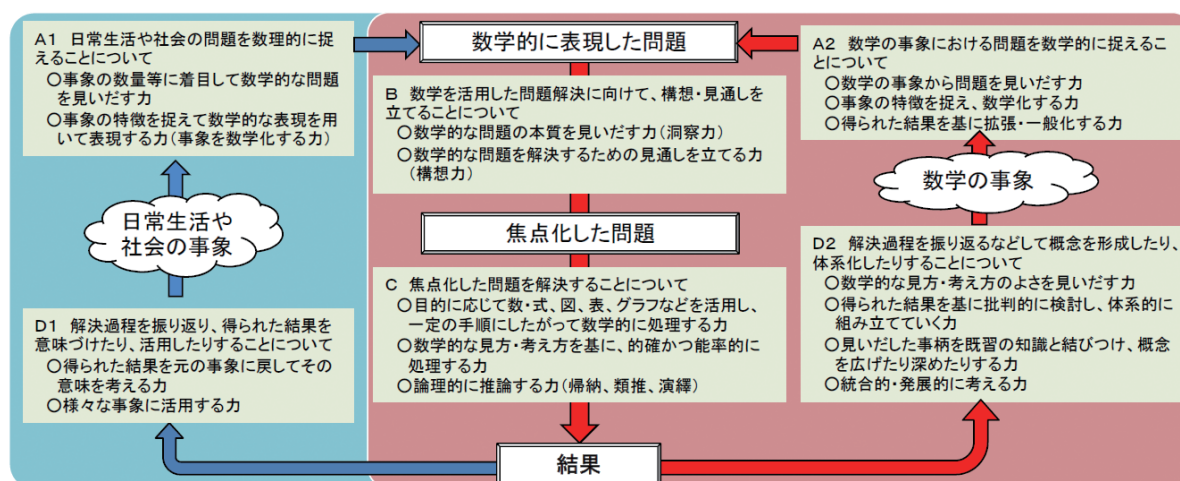


図2-0-1 数学の問題発見・解決の過程と育成を目指す資質・能力（の一部）

「数学的推論と21世紀的な課題」への対応は、1.2節で言及した質問項目にある以下の活動のうちのどれを実践するものであるかを示している。

- ・ 図、グラフ、シミュレーションから、数学的な情報を見つけ出すこと
- ・ 実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること
- ・ 何か決定を行うときに、統計上のばらつきの考え方をを用いること
- ・ 実社会の問題の中から、数学的な側面を見つけること
- ・ 数学的モデルの背景にある条件や仮定が分かること
- ・ 変数、記号、あるいは図表を用いて状況を数学的に示すこと
- ・ データで観測された傾向の重要性を評価すること
- ・ コンピュータでコーディングやプログラミングをすること
- ・ コンピュータの数学的機能（例：表計算ソフト、プログラミング・ソフト、グラフ電卓）を使うこと
- ・ 不規則な形をした物の性質に関する量を計算して求めること

図2-0-2 「数学的推論と21世紀的な課題」の質問項目

14 この図は平成28年の中央教育審議会の「幼稚園、小学校、中学校、高等学校及び特別支援学校の学習指導要領等の改善及び必要な方策等について（答申）」別添資料2/3のp.31にある図から該当部分のみを載せたものである。

●事例における授業の具体

1. 単元における本時の位置付け

事例がどの単元のどこに位置づくものであるかを示している。ここでの「単元」とは、概ね教科書における「節」の範囲を想定している。

2. 本時の目標

単元の目標（紙幅の都合から記していない）を踏まえた本時の目標を具体的に示している。

3. 授業過程の例

数学的活動を通した学びを実現するための授業過程を、数学的活動（数学の問題発見・解決の過程の遂行）に基づいて、「問題を見いだす」、「主に個別に考える」、「主に協働的に考える」そして「振り返る」の要素で構成してある。ただしこれは必ずしもこの順序になるというわけではない。大切なことは、生徒が目的意識を持ち、生徒主体で考え、生徒個々の多様な考えと集団としての協働を生かして学びの深まりを生むことである。

●事例の解説

本事例の授業過程は実際の授業を基にイメージされたものではあるが、あくまでも一例である。各学校や教師が、生徒の実態に応じて創意工夫を加えたり、事例とは異なる扱い方をしたりすることができるように、以下の3点について解説をしている。

1. 事例作成の意図

この事例を作成した意図や、この事例で大切にしたいことなどを説明している。

2. 実践上のポイント

授業実践上のポイントとして、①目的意識を持たせる工夫、②学びを深める工夫の2点を説明している。①は、1.2節で述べた「生徒が解決の必要性を感じ、主体的に関わりたくなる場の創出」実現に向けた視点である。②は、1.3節で述べた、深い学びの実現に向けた視点である。

3. さらなる指導の充実に向けて

本時の問題の発展的な扱いや、本授業後の展開など参考となる情報を示している。

事例の一覧

以下が、作成した事例の一覧である。下記にはリンクを埋め込んであり、該当ページに直接ジャンプできるようになっている。

| | |
|------|---|
| 事例 1 | 数学の事象を考察しながら豊かに学び直す事例 数当てゲームの仕組みを探ろう [数学Ⅰ・式の計算] |
| 事例 2 | 日常の事象を数学的に表現することのよさを感じ得する事例 企画が採用される票数を求めよう [数学Ⅰ・一次不等式] |
| 事例 3 | 日常の事象を考察しながら生きて働く知識及び技能を習得する事例 はしご車が救助可能な高さは？ [数学Ⅰ・鋭角の三角比] |
| 事例 4 | 数学を活用して日常の事象を考察する力を身に付ける事例 販売価格はいくらにすればよい？ [数学Ⅰ・二次関数の最大と最小] |
| 事例 5 | データに基づいて日常の事象を考察する力を身に付ける事例 男女の記録の比べ方を考えよう [数学Ⅰ・分散と標準偏差] |
| 事例 6 | 数学を活用して判断する力を身に付ける事例 どのような人が検査を受ける？ [数学A・いろいろな確率] |
| 事例 7 | デジタルツールと論理を用いて問題発見する力を身に付ける事例 三角形の「中心」の秘密を探ろう [数学A・三角形と比] |
| 事例 8 | 論理的に考えることの楽しさやよさを感じ得する事例 正直者を探そう [数学A・ゲームやパズルの中の数学] |

事例
1数学の事象を考察しながら
豊かに学び直す事例

本事例のポイント

- 中学校までの学習を活かしながら、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすることを目指す。
- 教師が生徒の思い浮かべた数を当てる「数当てゲーム」の形にすることで、「なぜ数を当てることができたのだろうか」、「どんな数でも当てることができるだろうか」等の問いを引き出し、生徒の目的意識を高める。
- 本事例は豊かな学び直しを意図し、数学の学習に課題のある生徒でも取り組みやすいよう工夫している。その一方で、「数当てゲーム」のルールを変更したり、最初の数範囲を広げたりするなど、発展的に考察することもでき、様々な学校で実践可能である。

数当てゲームの仕組みを探ろう【数学Ⅰ・式の計算】

本時の問題

ある1つの自然数を思い浮かべ、次のルールに従って計算してみよう。

- (1) 2を足す
- (2) 2をかける
- (3) 2を引く
- (4) 2で割る

この結果から、最初に思い浮かべた数を当てることができるだろうか。また、(1)～(4)にある2を3に変えると、どのようなことが言えるだろうか。

さらに、次のルールを追加するとどうなるだろうか。

- (5) 2乗する
- (6) ルートを付ける

●平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学Ⅰ(1)イ(4)問題を解決する際に、既に学習した計算の方法と関連付けて、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすること

| |
|--|
| ●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化 |
| <ul style="list-style-type: none"> ・数学の事象から問題を見出す力 (A2) ・得られた結果を基に批判的に検討し、体系的に組み立てていく力 (D2) |
| ●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応 |
| <ul style="list-style-type: none"> ・図、グラフ、シミュレーションから、数学的な情報を見つけ出すこと ・変数、記号、あるいは図表を用いて状況を数学的に示すこと |

1. 単元における本時の位置付け

単元名「式の計算」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|--|-------|
| 第1次 | 式についての用語の意味を理解する。 指数法則や分配法則, 乗法公式などを利用して, 文字を用いた式を展開する。 (本時は1/4) | 4時間 |
| 第2次 | 乗法公式と関連付けて因数分解の公式を理解し, 文字を用いた式を因数分解する。 | 4時間 |

2. 本時の目標

- 式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりできるようにする。(思考力, 判断力, 表現力等)
- 文字式のよさを認識し数学を活用しようとする態度, 問題解決の過程を振り返って考察を深めようとする態度や創造性の基礎を養う。(学びに向かう力・人間性等)

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|--|--|
| <p>問題を見いだす</p> <p>T:「ある1つの自然数を思い浮かべてください。このルール(1)～(4)に従って計算した結果の数字を答えてください。」</p> <p>(1) 2を足す (2) 2をかける (3) 2を引く (4) 2で割る</p> <p>S:「5です。」</p> <p>T:「あなたが思い浮かべていた数は4ですね!」</p> <p>S:「あっている。すごい! 他の数でも当てられるのかな。」 (他の生徒にもたずねて, 最初に思い浮かべた数を当てる)</p> | <p>○生徒とやりとりしながら進めて生徒が問いを持てるようにする。</p> <p>○ルールに則って具体的に計算する際, 例えば</p> <p>(1) $4 + 2 = 6$ (2) $6 \times 2 = 12$ (3) $12 - 2 = 10$ (4) $10 \div 2 = 5$</p> |

| | |
|--|---|
| <p style="text-align: right;">目的意識を持たせる工夫① 生徒から問いを引き出す</p> <p>S:「なぜ当てることができるのだろうか?」 S:「最後の結果は最初の数の +1 になっていそう。」 S:「最初の数は最後の結果から -1 になっていそう。だから最後の結果から1を引けば最初の数を当てることができるのでは?」 T:「どんな自然数でもそうなりますか。」</p> <p>●問いの提示 T:「なぜ、最初の数を当てることができたのでしょうか。仕組みを探ってみましょう。」</p> | <p>のように計算過程も併せて板書しておく、生徒が個別に考える際の手立てとなりうる。</p> |
| <p>主に個別に考える</p> <p>●具体的に数で考える反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> 例①: いろいろな数で確かめることで、最後の結果は最初の数 +1 になっていそうだと考える。 例)最初の数が4のとき (1) $4+2=6$ (2) $6 \times 2 = 12$ (3) $12-2=10$ (4) $10 \div 2 = 5$ 例②: 計算をせずに、式に最初の数を残しておくことで、(4)の結果は最初の数 +1 になっていそうだと考える。 例)最初の数が4のとき (1) $4+2$ (2) $(4+2) \times 2$ (3) $(4+2) \times 2 - 2$ (4) $\{(4+2) \times 2 - 2\} \div 2 = (4+2) - 1 = 4+1$ <p>●文字を用いる反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> 例③: 最初の数をa (aは自然数) とおいて計算することで、(4)の結果は $a+1$ になることがわかる。 (1) $a+2$ (2) $(a+2) \times 2 = 2a+4$ (3) $(2a+4)-2 = 2a+4-2 = 2a+2$ (4) $(2a+2) \div 2 = 2a \div 2 + 2 \div 2 = a+1$ | <p>●思考・判断・表現: 2つの数の間の規則性を式を用いて表現したり考察したりしているか。 [ワークシート]</p> <p>●主体的に学習に取り組む態度: 具体的な数を用いて考えたり、最初の数を文字にして式で表現したりして粘り強く考え数学的論拠に基づき判断したりしようとしている生徒の取組を取り上げ、価値付けて共有する。</p> <p>○それでも思考が進まない生徒には、最初の数をいろいろに変えながら実際に数当てゲームを何回か試させてみる。</p> |
| <p>主に協働的に考える</p> <p>●考えの共有</p> <p>まずは周囲と考えを共有するよう指示し、その後、具体的に数で考えた反応と文字を用いている反応の両方を全体で共有していく。</p> <p>T: (反応例③について)「(4)の結果は $a+1$ となっていますが、これはどういうことを表していますか。」</p> | <p>○文字を用いた反応については、なぜそうしようとしたのかを問うなどして、生徒なりの数学的な見方や考え方が表出されるようにする。</p> |

| | |
|---|---|
| <p>S:「aは最初の数のことから、最初の数 $+1$ になっていることを表しています。」</p> <p>S:「$a+1$ から 1 を引けば a になるため、最初の数は(4)の結果から 1 を引けば当てられることを表しています。」</p> <div data-bbox="692 443 1018 510"> <p>学びを深める工夫① 生徒から複数の表現を引き出す</p> </div> <p>●具体的に数で考える方法と、文字を用いて考える方法のよさについての議論</p> <div data-bbox="671 611 1018 678"> <p>学びを深める工夫② それぞれのよさについて話し合う</p> </div> <p>T:「具体的に数で考える方法と、文字を用いる方法では、それぞれどのような良いところがありますか。」</p> <p>S:「具体的に計算すると、最初の数と計算結果の関係がわかりやすいです。」</p> <p>S:「文字を用いると、この「数当てゲーム」の仕組みがわかりやすいです。」</p> <p>S:「文字を使うと、すべての数でも成り立つことが1つの式から言えます。具体的に数で試す方法だと、実際にすべての数で計算しなければ成り立つとは言えません。」</p> <div data-bbox="692 1099 1018 1167"> <p>目的意識を持たせる工夫② 新たな問いを見いだす</p> </div> <p>●生徒の問いを共有する</p> <p>T:「次にどんなことを考えたいですか。」</p> <p>S:「自然数でなく負の整数でも数を当てられるか。」</p> <p>→この考えを取り上げる場合は展開Aへ</p> <p>S:「ルール(1)～(4)の中にある2を、他の数に変えたらどうなるのか。」</p> <p>→この考えを取り上げる場合は展開B (P.32) へ</p> <p>S:「ルールの順番を入れ替えたらどうなるか。」</p> <p>S:「ルールを追加したらどうなるか。」</p> | <p>○最初の数を基準にして解釈したり、(4)の結果から最初の数を当てる方法を考えたりすることを通して、(4)の結果の式を多面的に捉えさせる。</p> <p>○各自でよさを挙げる時間を取り、そのうえで周囲の生徒と話し合わせてみることも考えられる。</p> <p>○反応例②が見られなかった場合、教師から提示することも考えられる。</p> <p>○ここで出てきた生徒の問いはすべて板書しておき、そのうち、授業内で扱いきれなかったものは、後の学習につなげたり、レポート課題にしたりする。</p> |
| <p>展開A (数の範囲について主に協働的に考える)</p> <p>●具体的に数で考える反応例</p> <p>S:「最初の数を-3にすると、(4)の結果は-2となり、確かに最後の結果から1を引けば最初の数を当てられます。」</p> <p>T:「では、最初の数は負の整数でも数を当てられるのですね。このことも文字を使って説明できるでしょうか。」</p> <p>●説明や証明を振り返る</p> <p>S:「反応例③では最初の自然数をaと表現したから、最初の負の整数を$-a$と表すと、(4)の結果は$-a+1$となっています。」</p> <p>S:「aを$-a$にただけで、それ以外の部分は全く変わっていないね。」</p> | <p>○生徒の実態に応じて、負の整数を$-a$ (aは自然数)と表現することも想定される。このような生徒の考えも積極的に取り上げたい。</p> |

| | |
|--|--|
| <p>S:「反応例③では、aは自然数としたけど、自然数であることは説明の中では用いていません。だからaが自然数でなくとも同じ説明ができると思います。」</p> <p>学びを深める工夫③ 文字が表す数の範囲について話し合う</p> <p>T:「説明や証明を比較したり振り返ったりすることで、新たにこの数当てゲームが成り立つaの範囲について考えることができましたね。」</p> | |
| <p>展開B（ルールの変更について主に協働的に考える）</p> <p>●具体的に数で考える反応例</p> <p>S:「ルールの中の数を2から3に変えて、</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) 3を足す (2) 3をかける (3) 3を引く (4) 3で割る <p>にして、最初に4を思い浮かべたとすると、(4)の結果は6になった。(4)の結果から1を引いても最初の数にはならない。」</p> <p>S:「（上と同様に考えて）2を引くと最初の数当てられるのかもしれない。」</p> <p>・例④：具体的に考えたり、反応例③と同様に文字式を用いたりすることで、最後の結果から最初の数当てする方法を考え、ルールの数を3にすると、最後の結果から2を引けば最初の数当てられることを見出す。</p> <p>●さらに一般化を目指した反応例</p> <p>・例⑤：ルールの数を具体的にいろいろな数にして計算することで、最後の結果は、最初の数$+$(ルールの数-1)になっていそうだと予想する。</p> <p>・例⑥：最初をa、ルールの数をb（a, bは自然数）とおいて計算することで、最後の結果$a+b-1$を求める。</p> <ol style="list-style-type: none"> (1) $a+b$ (2) $(a+b) \times b = ab+b^2$ (3) $(ab+b^2)-b = ab+b^2-b$ (4) $(ab+b^2-b) \div b = ab \div b + b^2 \div b - b \div b = a+b-1$ <p>・例⑦：例⑥の結果$a+b-1$を$a+(b-1)$と見ることで、最後の結果が最初の数$+$(ルールの数-1)になっていること、または最後の結果から(ルールの数-1)を引くことで、最初の数当てられることがわかる。</p> <p>●さらなる一般化を目指して</p> <p>T:「ルールの中の数が変わると、最後の結果から何を引けばよいかが変わるのですね。では、最後の結果から5を引いたら最初の数当てることができるようにするには、ルールの中の数を何にしたらよいでしょうか。」</p> | <p>○ルールを変える方法は、多様に考えられる。たとえば(1)～(4)の数をバラバラに変えることも考えられるが、その場合規則性が見えにくくなる。展開Bのように統一して変更させる方法と比較することで、変数を制御することの有用性について考えさせることもできる。</p> |

| | |
|---|--|
| <p>S:「例えばルールを6にしてみると、最初の数 +5 になった。」(反応例⑤に対応)</p> <p>S:「ルールが2のとき最後の結果は +1 で、ルールが3のとき最後の結果は +2 になっていました。最後の結果は、$+(\text{ルールの数}-1)$ になっていそうだから、ルールを6にしたらいのでは。」</p> <p>S:「最初の数を a、ルールを b とおいて計算することで、最後の結果は $a+b-1$ となりました。」(反応例⑥に対応)</p> <p>S:「最初の数が a だから、最後の結果を $a+(b-1)$ と見れば、最初の数の当て方がわかるね。」(反応例⑦に対応)</p> | |
| <p>振り返る</p> <p>●計算のルールの追加</p> <p>T:「さっき、次にどんなことを考えたいですか、と尋ねたとき、ルールの順番を入れ替えたり、ルールを追加したりしたらどうなるかを考えたいと言っていた人がいましたね。本時の最後に、最初に行った「数当てゲーム」の(1)～(4)の後ろに、次のルール(5)(6)を追加すると、(6)の結果から最初の数は当てられるかを考えてみましょう。」</p> <p>(5)2乗する</p> <p>(6)ルートを付ける</p> <p>S:「\sqrt{x}は2乗したら x になる数を表しているから、2乗してルートを付けても何も変わらないんじゃないかな。」</p> <p>T:「これらのルールを加えたとき、最初の数が自然数でなくても当てられるでしょうか。自分の考えをワークシートに書いて提出してください。」</p> | <p>●主体的に学習に取り組む態度：規則性を文字を用いた式で説明できているか。文字を用いることのよさを感じ得できているか。</p> <p>[ワークシート]</p> <p>○ワークシートを回収し、その中から、次時に取り上げる考えを見出すようにする。例えば、最初の数が -1 より小さい場合、(6)の結果 $+1$ では最初の数が当てられないことを見出した考えを取り上げ、その理由を文字を使って探ることなどが考えられる。</p> |

事例1の解説

1. 事例作成の意図

本単元は、数学Ⅰの最初に学習することの多い、高等学校数学科全体の基礎となる内容を取り扱っている重要な単元である。この内容の多くは中学校までの学習をベースにしており、また日常生活や社会と関連付けにくい面があることから、教師による説明と、技能を習熟するための練習の繰り返しになりやすい。そのような授業から高等学校の数学の学習を始めることは、特に中学校までの数学の学習状況に不安のある生徒たちに対して、新たな学習への期待感を喪失させてしまうことが危惧される。

そこで、本事例は、式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすることを目標に据えるとともに、中学校での学習の豊かな学び直しも意図しつつ、規則性を見いだしたり、文字を使った式を用いて説明したりする活動の中で、2種類の文字を扱ったり、分配法則を用いたりする活動を通して文字を使った式の計算に関する基本的な内容を復習できるようにした。

また、本事例は、「数と式」の第1次を想定している。これは多くの学校において高等学校数学科の授業開きに相当すると思われる。中学校までの数学の学習に対してよいイメージをもっていない生徒にも、それをリセットし、高等学校での数学の学びを豊かにイメージしてほしいという願いも込めて、充実した数学的活動を実現したい。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

まず、教師が生徒の思い浮かべた数を当てる「数当てゲーム」を行い、「なぜ数を当てることができたのだろうか」、「どんな数でも当てることができるだろうか」などの問いを引き出すようにする。このことにより、規則性を見いだしたり、文字を使った式を用いて説明したりする活動の目的意識を高めるようにする。

また、ルール(1)～(4)には統一して2を用いたが、ルールの中の数を統一して設定することで「ルールの中の数が2ではなく3だったらどうなるだろうか」などの新たな問いを引き出し、この数を変数として新たなルールを作りその規則性を見いだす活動の目的意識を高めるようにする。

(2) 学びを深める工夫

次の3点を工夫する。

第一に、最初の数と最後の結果の2つの数の関係性について、最初の数基準とする表現と、最後の結果を基準にする表現の二つを引き出すことである。

生徒の反応例Ⅰ

S:「最後の結果は最初の数に+1 になっていそう。」

生徒の反応例Ⅱ

S:「最初数は最後の結果から-1 になっていそう。だから最後の結果から1を引けば最初の数当てることができる。」

この両者の意見を取り上げることにより、 $a+1$ を a に1を加えた数と解釈したり、1を引けば a になる数と解釈したりすることができる。この見方は式を多面的に捉えたり目的に応じて適切に変形したりすることの素地となり、深い学びにつながる。そのための手立てとしては、「(4)の結果はどうなっていますか」という発問から最初の数基準とした表現を引き出したり、「どのようにして最初の数当てることができますか」という発問から(4)の結果を基準とした表現を引き出したりすることが考えられる。

第二は、具体的に数で考える方法（帰納的推論）と、文字を用いて考える方法（演繹的推論）のそれぞれのよさを議論することである。具体的に数で考えることで規則性を予想しやすくなり、それに

よって文字を用いて表現する際のゴールを見据えることができる一方、文字を用いることですべての実数について表現でき、抽象的に処理することが可能になり、またそれによって事象の構造を理解しやすくなる。それぞれのよさを認識させるとともに、特に数学の学習に課題のある生徒に対しては具体的に数で考えてみることも価値付ける。

第三に、この数当てが成り立つ、数の範囲について議論することである。ルール(1)～(4)において「最後の結果は最初の数+1である」という性質はすべての実数で成り立つ。しかし、最初に提示する問題では自然数に限定している。最初のを a (ただし a は自然数とする) とする、などのように条件を設定して文字を使った式で説明した生徒がいれば、その意見を取り上げつつその説明を振り返ることで、 a は自然数とするという条件が不要であることを確認してもよい。これは、問題解決の過程を振り返って考察を深めたり、評価・改善したりしようとする態度を育成することにつながると思う。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 「主に協働的に考える」場面において、次に考えたいこととして、生徒からは様々な考えが出されることが期待される。それらを板書するとともに、そのうちのいくつかを後の学習につなげたり、レポート課題にしたりすることが考えられる。
- ルール(5)(6)を追加すると、最初の数 a が $a < -1$ であるとき、「(6)の結果-1」では最初のを当てられないことを見だし、数当てゲームに条件を加えて修正することが考えられる。「最後の結果は最初の数 +1 の絶対値である ($\sqrt{(a+1)^2} = |a+1|$)」のように表現方法を改めたりすることも考えられる。なお、例えば、最初のを $\sqrt{3}$ として計算を進めると、(6)の結果は $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ となる。一方で、文字を使った式に基づけば $\sqrt{3}+1$ となるはずである。このことから、 $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = \sqrt{3}+1$ となるのだろうか、と問いを立てて確かめることで、二重根号を外す方法を考察することも可能である。このような問いについては、1単位時間の授業内ですべて解決できずとも、単元全体で解決できるようにデザインすることで、後の学習につなげることができる。

事例
2日常の事象を数学的に表現することの
よさを感じ得る事例

本事例のポイント

- 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え一次不等式を問題解決に活用する力を養うことで、PISAの「数学的プロセス」にも関わる数学的な見方・考え方を更に確かで豊かなものにしていくことを目指す。
- 異なる考えを比較検討し、それぞれのよさを議論して、一次不等式を用いて事象を考察することのよさの認識を促すという深まりを生んでいく。
- 本事例を単元「一次不等式」の最初に扱うことも考えられる。

企画が採用される票数を求めよう【数学Ⅰ・一次不等式】

本時の問題

学園祭で行う学年企画に7チームから応募があった。学年集会においてプレゼンテーションを実施し、1人が1票を投票して上位4案を採用することになった。

この学年の全生徒である128人が投票するとき、採用確実となる票数はいくつだろうか。



● 平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学Ⅰ(1)イ(エ)日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、一次不等式を問題解決に活用すること。

● 「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 事象の特徴を捉えて数学的な表現を用いて表現する力 (A1)

● 「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・ 実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること
- ・ 変数、記号、あるいは図表を用いて状況を数学的に表すこと

1. 単元における本時の位置付け

単元名「一次不等式」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|---|-------|
| 第1次 | 不等式の解の意味や不等式の性質について理解し，それに基づいて一次不等式を解く | 3時間 |
| 第2次 | 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え一次不等式を問題解決に活用する（本時は1/2） | 2時間 |

2. 本時の目標

- 日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え，一次不等式を問題解決に活用できるようにする。（思考力，判断力，表現力等）
- 事象を一次不等式を用いて考察するよさを認識し，問題解決に一次不等式を活用しようとしたり，粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりする態度を養う。（学びに向かう力，人間性等）

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|---|--|
| <p>問題を見いだす</p> <p>T：(問題の状況を説明したうえで)「皆さんが投票される側だとすると，何が気になりますか。」</p> <p style="text-align: center;">目的意識を持たせる工夫 生徒と問題を見いだしていく</p> <p>S：「自分たちの企画が採用されるのかどうかです。」</p> <p>S：「どれだけ票を取れば企画が採用されるのかが気になります。」</p> <p>T：「どれだけ票を取れば自分たちの案が採用されるのでしょうか。その票数はわかるものなのでしょうか。今日はこれを考えてみましょう。」</p> | <p>○生徒とやりとりしながら進めて生徒が問題を見いだせるようにする。</p> <p>○問題意識を高めるために票数を予想させてみることも考えられる。</p> <p>○まずは個別に考えるように指示する。</p> |
| <p>主に個別に考える</p> <p>●一次不等式を用いない反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> ・例①：128票を5チームで票数になるべく同じになるように分け，そこから4位が確実になる得票数を求める。 ・例②：自チームの得票数を具体的に設定し，それを128票から引いた残りの票数を4で割った値（自チームを抜いた4位の最大得票数）を自チームの得票数と比較する。 ・例③：自チームの得票数を具体的に設定し，他3チームも同票であるとして，128票からその4チーム分を引いた残りの票数（5位の最大得票数）を，自チームの得票数と比較する。 <p>●一次不等式を用いる反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> ・例④：自チームの得票数をxとし，$x > \frac{128-x}{4}$と表現して，一次不等式を解いて求める。 | <p>●主体的に学習に取り組む態度：自チームの票数などを文字にして数量関係に着目したり，具体的な票数を設定して粘り強く考え数学的論拠に基づき判断したりしようとしている生徒の取組を取り上げ，価値付けて共有する。</p> |

| | |
|---|--|
| <p>・例⑤：自チームの得票数をxとし、$x > 128 - 4x$と表現して、一次不等式を解いて求める。</p> <p>●その他</p> <p>・例⑥：自チームの得票数を具体的に設定して考えようとしている。</p> <p>・例⑦：自チームの得票数をxとして得票数の関係を式に表現しようとしている。</p> <p>・例⑧：思考が進まない。</p> | <p>○それでも思考が進まない生徒には、問題の場面や条件をイメージできているか確認することが考えられる。また、例えば得票数が30や20だったらどうか、あるいはもし1つの案しか採用されないとするとどうなるかなど、具体的に考えてみることを促す。</p> |
| <p>主に協働的に考える</p> <p>●考えの共有</p> <p>まずは周囲と考えを共有するよう指示し、その後、一次不等式を用いていない反応（例①～③）と用いている反応（例④や⑤）の両方を全体で共有していく。</p> <p>一次不等式を用いている反応が見られなかったときは、次のように発問する。</p> <p>T:「自分たちの票数をxとしたとき、例②や例③の考えをもとにして、自チームが選ばれるための票数についての関係を式に表現してみましょう。」</p> <p>●問題の条件や情報についての議論</p> <p>T:「問題には7つの案の応募があったとありますが、皆さんが説明した考えでは7という数値は出てきていません。なぜでしょうか。」</p> <p>S:「みんな結局は上位4案と5位の案の票数を比べている。」</p> <p>S:「5位以下の票数が全て5位の案に集まっても上位4案には入らないと考えればよいので、7という情報は使わない。」</p> <p>T:「なるほど、応募がいくつあろうとも4位と5位を比べれば考えればよいので、応募総数の7という情報は不要なのですね。」</p> <div style="border: 1px solid black; background-color: #e0f2f1; padding: 5px; margin: 10px 0;"> <p>学びを深める工夫 それぞれの考えのよさについて話し合う</p> </div> <p>●一次不等式に表すこととそのよさについての議論</p> <p>T:「皆さんの考えには、一次不等式を使わないものと、使うものがありました。それぞれのよさは何でしょうか。」</p> <p>S:「一次不等式を使わない方は、やっていることの意味がわかりやすいです。一次不等式を使う方のよさは何だろう。」</p> <p>S:「説明がすっきりする。」</p> <p>S:「一旦、式にすれば、あとは不等式を解くだけになる。」</p> <p>S:「不等式を解いている間は問題の意味を考える必要があまりない。」</p> <p>S:「答えが違ったとき、不等式の変形が合っているなら、そもそも不等式が違う可能性が高そうとわかる。」</p> | <p>○一次不等式を用いた反応については、何に注目したのか、なぜそうしようとしたのかを問うなどして、当該生徒なりの数学的な見方・考え方が表出されるようにする。</p> <p>○ここは問題を解決できている生徒でも意識していない可能性があるので、意図的に発問する。</p> <p>○各自でよさを挙げる時間を取り、そのうえで周囲の生徒と話し合わせてみることも考えられる。</p> <p>○一次不等式を用いない考えが否定的に捉えられないように留意する。</p> <p>○ただし、解は元の事象に戻してその意味を考える必要があることに言及しておく。</p> |

| | |
|--|---|
| <p>T:「そうしたよさを生かすには一次不等式に表す必要がありますが、問題の何に着目すれば不等式に表すことができそうですか。」</p> <p>S:「どれも、自チームの票数をxとしたとき、それが何を上回ればよいかを不等式に表しています。」</p> <p>T:「中学生のときは数量が等しい関係に着目して方程式に表しましたが、数量の大小関係に着目すると不等式に表せますね。」</p> | |
| <p>振り返る</p> <p>●本時の学習内容についての確認</p> <p>例えば「今度は40名のクラスで3案選ぶとき、最低何票取れば採用になるかを求めてみよう」といった問題を課し、今回は一次不等式に表現してみるよう指示することが考えられる。</p> <p>●振り返り</p> <p>T:「今日の授業で大事だと思ったことは何ですか。また、今日の授業を踏まえると、次にどんなことを考えてみたいですか。振り返り用紙に記しておきましょう。」</p> | <p>●思考・判断・表現：一次不等式に表現できるか。 [ワークシート]</p> <p>●主体的に学習に取り組む態度：事象を一次不等式を用いて考察するよさを認識しているか。 [振り返りシート]</p> |

事例2の解説

1. 事例作成の意図

事象の数量関係に着目してその特徴を捉え、数式に表現し、それが形式的に処理できることを生かして問題解決を図ることは、中学校第1学年で一次方程式を学習するときから働かせ、成長させてきている大切な数学的な見方・考え方である。本単元においても日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え一次不等式を問題解決に活用する力を養うことで、この数学的な見方・考え方を更に確かめて豊かなものにしていくことが期待できる。本事例は、この数学的な見方・考え方が生徒に一層意識されることを意図している。したがって本時では、必要に応じて中学校での方程式の学習を振り返るなどして関連付け、数学的な見方・考え方として統合を図っていくことが大切である。

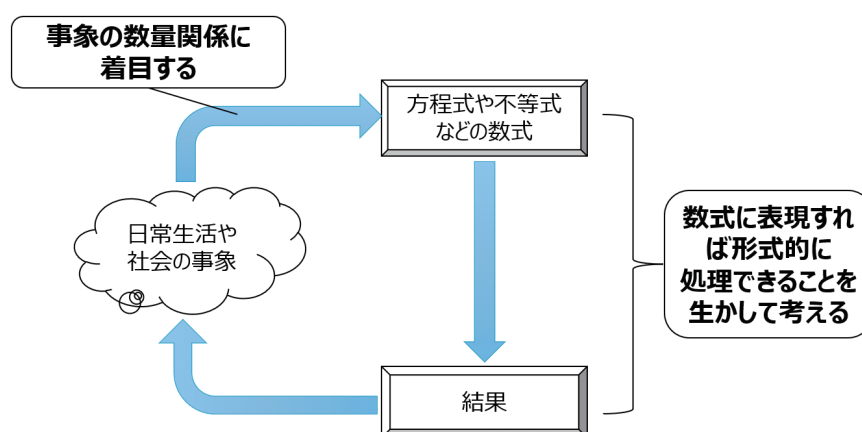


図2-2-1 方程式や不等式を用いた問題解決過程における数学的な見方・考え方の例

特に、数式の処理はコンピュータが代行可能であることを考えると、事象を数学的に捉えて数式に表現する力と、数学的に得られた結果を元の事象に戻してその意味を考える力の育成がより大切になってくると考えられる。本時は前者に焦点を当て、一次不等式に表現する力の育成を目標としたものである。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

本事例では、従来から高等学校の数学の授業など¹⁵で扱われてきた「投票」を事象として取り上げている。授業実践に際しては、問題場面や数値設定などは学校及び生徒の実情に合ったものにするとともに、本問題に取り組む生徒たちを投票される側の立場に立たせる場面とするなどの工夫をする。さらに、問題提示においては、まずは投票の状況を生徒に想起させながら（例えば本時の問題でいえば最後の一文の手前までを示しながら）、投票される側に立つと何が気になるかを問うなどして、「どれだけの票を取れば採用確実となるのか」といった問題を生徒とともに見いだしていくようにする。

(2) 学びを深める工夫

先述した数学的な見方・考え方を生徒が意識し、今後も働かせていけるようにするには、そのよさの認識を促すことが大切である。そこで、一次不等式を用いない考えと、用いる考えを比較検討することにより、それぞれのよさについて話し合うことを通して、一次不等式を用いて事象を考察することのよさの認識を促すようにする。実際、本問題の解決方法にはその両方が考えられ、それぞれについても多様な表現がありうる。まずは生徒に自由に考えさせ、素直な考えを表出させるために、本時では、問題を把握するまでは全体で共有し、その後、個別に考える時間を設けている。

例えば、次のような反応が考えられる。

生徒の反応例（例①）

128票を5チームで票数がなるべく同じになるように分けると、26, 26, 26, 25, 25

このとき2チームが25票で4位に並んでいるので、最低でも26票とればよい。上位4チームが最低26票ずつとれば、5位チームは最大でも24票しかとれなくなる。

生徒の反応例（例④）

自分のチームの票数を x とするとき、自分のチームを除く上位4チームの中の4位チームには最大で $\frac{128-x}{4}$ 票集まることになる。

そこに勝てばよいから、 $x > \frac{128-x}{4}$ この不等式を解くと、 $x > \frac{128-x}{4} = 25.6$

よって26票。

15 文部科学省が平成24年にまとめた『言語活動の充実に関する指導事例集【高等学校版】』でも事例として取り上げられている。

複数の考えを比較検討するに当たっては、まずは小集団等において生徒個々の考えについて共有を図ったうえで、事前に取り上げること計画していた考えをした生徒を指名し、教室全体で共有する。このとき、一次不等式を活用しようとする考えが生じないことが想定されるのであれば、その考えの表出を促す発問（例えば、「自分たちの票数を x としたとき、例②や例③の考えをもとにして、自チームが選ばれるための票数についての関係を式に表現してみましょう」）を覚えておく必要がある。反応例①～③のような考えが、一次不等式を用いた表現の基となることもある。

この比較検討における議論では、一次不等式を用いない考えの価値を下げることをしないよう留意する必要がある。大切なことは、それぞれの考えのよさを認識し、一次不等式を活用する考えを有していなかった生徒が、この問題に限らず、一次不等式を活用するという考えも選択できるようにしていくことである。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例は単元「一次不等式」第2次に位置付けたものであるが、第1次の第1時に扱うことも考えられる。事象から見出した問題の表現として一次不等式が必要になることを実感した上で、今度は一次不等式それ自体を考察の対象とし、その解を求められるようになってから、最初に扱った事象に戻るとというのが第1次を通した一つの展開例であろう。これは数学的活動として捉える問題発見・解決の過程を8の字に回っているとも捉えられる。
- 先述したように、数式の処理はコンピュータが代行可能なので、事象を数学的に捉えて数式に表現する力と、数学的に得られた結果を元の事象に戻してその意味を考える力の育成がより大切になってくると考えられる。本時は前者の力に焦点を当てたので、次時では後者の力に焦点を当てることが考えられる。
- 本時の問題について、全体の票数を N 、採用される案の数を n として一般化すると、採用確実になる票数は以下のように表される。このことを、生徒の振り返りに応じて次時に扱ったり、授業において追究まではせず今後の課題としておき、後で記録に残す評価のための課題として用いたりすることも考えられる。また、本時において「思考・判断・表現」が「十分満足できる」状況と判断される生徒に対して、この考察を促してみることも考えられる。

$$\left\lfloor \frac{N}{n+1} \right\rfloor + 1$$

- 一次不等式を問題解決に活用できるようにするには、必要な情報に着目していけるようにすることも大切である。そのために本問題では「7チームの案」という本質的でない情報を入れ込んでいる。この情報は使わないこと、上位4案と5位の関係を調べればよいといったことを生徒自身が把握し、これも全体で議論することが考えられる。

事例
3日常の事象を考察しながら生きて働く
知識及び技能を習得する事例

本事例のポイント

- 豊かな学び直しをしながら、生徒たち自身が三角比（正弦）を見だし、生きて働く知識及び技能を習得することを目指す。
- 「はしご車のはしごが届く高さについて考える」という日常事象の場面を扱い、問題提示を工夫することにより、生徒自身が解決の必要性を感じる場を設け、目的意識を持った数学的活動になるようにする。
- 障害物がありはしご車が近くまで寄れないといった状況にしたり、はしごを屈折できるはしご車にしたりすることなどにより、発展的に取り組ませることも可能である。

はしご車はどこまで届く？【数学Ⅰ・鋭角の三角比】

本時の問題

30mのはしごを持つはしご車があります。

はしごの起伏角度を 60° ， 75° にすると、それぞれ高さ何mのところまで届きますか。

ただし、はしごの支点は地面から2 mの高さにあるとします。



※実際、多くのはしご車において起伏角度の最大は 75° となっています。

●平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学Ⅰ(2)ア(7)鋭角の三角比の意味と相互関係について理解すること。

●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 事象の特徴を捉えて数学的な表現を用いて表現する力 (A1)
- ・ 数学の事象から問題を見いだす力 (A2)

●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・ 実社会の問題の中から、数学的な側面を見つけること
- ・ 実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること

1. 単元における本時の位置付け

単元名「鋭角の三角比（図形と計量）」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|--|-------|
| 第1次 | 鋭角の三角比の意味を理解し、三角比の値を求めたり、三角比を用いて角の大きさや辺の長さを求めたりする。（本時は1/3） | 3時間 |
| 第2次 | 鋭角の三角比を活用して具体的な場面の問題を解くことにより、三角比の有用性を認識する。 | 2時間 |
| 第3次 | 三角比の相互関係について理解し、1つの三角比の値から他の2つの三角比の値を求める。また、 $90^\circ - \theta$ の三角比の値を求める。 | 2時間 |

2. 本時の目標

- 問題解決に必要な直角三角形を見だし、二つの辺の比の値に着目して、三角比（正弦）の意味を理解できるようにする。（知識及び技能）

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問（T）と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応（S） | 評価（●）・留意点（○） |
|---|---|
| <p>T：「火災時にビルの高層階に取り残された人を救出するために、はしご車を使用することがあります。はしご車のはしごの長さは何種類かあって、日本で多く活躍しているはしごの長さは30mとのことです。どのくらいの高さまで届くでしょうか。」</p> <p>S：「30mではないのですか？」</p> <p>S：「はしごが斜めになるから、30mにはならないと思います。」</p> <p>T：「そうですね。まずは、はしごの起伏角度（以下「はしご車の角度」とする。）が60°のときを考えてみましょう。はしごの長さが30mで角度が60°なら、高さ何mまで届くでしょうか。ただし、はしごの支点は地面から2mの高さにあるとします。」</p> <p>S：「ここでの高さって、地面からどこまでですか？」</p> <p>S：「柱の太さなどは影響しませんか。」</p> <p>T：「良い疑問ですね。どのように考えましょうか。」</p> <p>S：「私は、いろいろ考えると大変なので、単純な線で考えようとしていました。」</p> <p>T：「まずは考えやすいところから始めるのは大切なことです。では、はしごを、始点をA、はしごの先端をBとする線分ABで考えてみましょう。」</p> | <p>○はしご車の動画を見せる。</p> <p>目的意識を持たせる工夫① 現実感を高める</p> <p>目的意識を持たせる工夫② まずは60°のときのみを考えさせる</p> <p>※起伏角度とは、はしごと水平面のなす角のことである。</p> <p>学びを深める工夫① 定式化について話し合う</p> <p>○定式化に係わる話し合いについては、まず個別に取り組んだ後に行うことも考えられる。</p> <p>○定規・分度器を活用してよいこととする。</p> |
| <p>主に個別に考える</p> <p>（以下、線分ABを斜辺、はしごの角度を1つの鋭角とする直角三角形を三角形ABCとする）</p> | <p>●主体的に学習に取り組む態度：問題の条件や情報</p> |

●三角形で捉えて縮図を用いる反応例

縮図をかいて長さを実測し、実際の高さを求める。

- ・例①：AB = 6 cmの三角形ABCをかいて、実測した長さを500倍すると、

$$x = 5.2 \times 500 = 2600(\text{cm}) = 26(\text{m})$$

よって求める高さは、

$$26 + 2 = 28 \quad \text{約} 28\text{m}$$

- ・例②：AB = 6 cmの三角形ABCをかいて、実際の場面と1/500の縮図の2つの相似な直角三角形の対応する辺の比は等しいので、

$$3000 : 6 = x : 5.2$$

$$6x = 15600$$

$$x = 2600(\text{cm}) = 26(\text{m})$$

よって高さは、 $26 + 2 = 28$ 約28m

●直角三角形の辺の比を用いる反応例

直角三角形の辺の比を用いて、高さを求める。

- ・例③：AC : AB : BC = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ であるから、

$$2 : \sqrt{3} = 30 : x$$

$$2x = 30\sqrt{3}$$

$$x = 15\sqrt{3} \div 25.98$$

よって高さは、 $25.98 + 2 = 27.98$ 約28(m)

- ・例④：AC : AB : BC = 1 : 2 : $\sqrt{3}$ であるから、

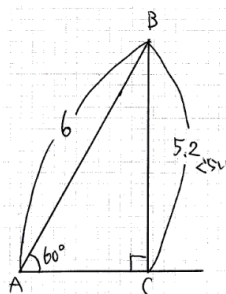
はしごの長さを1とすると、求める高さが $\frac{\sqrt{3}}{2}$ 倍になるの

$$\text{で、} 30 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 15\sqrt{3}$$

よって高さは、 $15\sqrt{3} + 2 = 27.98$ 約28(m)

●その他

- ・例⑤：はしごをかけた時の図をかいているが思考が進まない。



を整理し、縮図をかいて実測したり、直角三角形の辺の比を用いたりして粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしている生徒の取組を取り上げ、価値付けて共有する。

- 例⑤のように思考が進まない生徒には、問題の場面や条件をイメージできているか確認するとともに、30mと60°と高さが表れる図形として捉えるよう促す。

主に協働的に考える(1)

●考えの共有

全体で縮図を用いる反応例、直角三角形の比を用いる反応例を共有する。

●縮図に表すことのよさについての議論

T：「実際のはしご車のはしごの長さは30mですが、皆さんが説明した考えではこんなに小さな縮図を使っています。なぜこれで解決できるのでしょうか。」

S：「実際の長さを図に表すことはできないから…」

S：「実際の場面と縮図の直角三角形は、相似の関係であるので、縮図で長さを求めて、比で考えました。」

S：「三角形の大きさが変わっても、相似な三角形の対応する辺の長さの比は変わらないです。」

●知識・技能：日常生活や社会の事象を考察することを通して、問題の解決に必要な直角三角形を見いだすことができるか。

[ワークシート]

○割合や、2つの相似な図形は対応する辺の長さの比は等しいということの学び直しの機会とする。

| | |
|---|--|
| <p>T：「中学生の時に学んだ相似な三角形の性質を使っているのですね。」</p> <p>●直角三角形の辺の比を用いることのよさについての議論</p> <p>T：「直角三角形の辺の比を用いる考えには、$1:2:\sqrt{3}$が使われていました。なぜ3辺の比がこのようになるとわかるのですか。」</p> <p>S：「中学生のときに学んだ。」</p> <p>S：「正三角形の底辺を垂直に二等分したときできる直角三角形が△ABCなので、$AC:AB=1:2$となり、三平方の定理を使うと、$BC=\sqrt{3}$となります。」</p> <p>T：「60°の角度を持つ直角三角形については3辺の比がわかっているということですね。直角三角形の辺の比を用いる考えには、どのようなよさがありますか。」</p> <p>S：「縮図でもそうでしたが、相似な直角三角形であれば対応する辺の比は等しいので、比例式が使えます。」</p> <p>S：「∠Aの角度が60°と分かれば、いつでも斜辺の長さの$\frac{\sqrt{3}}{2}$倍になれば高さを求めることができます。」(*)</p> <p>T：「はしご（線分AB）の長さを1とすると、高さ（線分BCの長さ）が$\frac{\sqrt{3}}{2}$の大きさにあたるということですね。」</p> | <p>○特別な直角三角形と辺の比や三平方の定理の学び直しの機会とする。</p> <div data-bbox="1043 689 1382 813" style="border: 1px solid black; padding: 5px; background-color: #e0f2f7;"> <p>学びを深める工夫② 斜辺の長さを1とみて高さを求める考えを取り上げて価値付ける</p> </div> <p>○(*)の考えが出てこない場合は、「60°のとき、はしごの長さから高さを求めることができないか」などと問う。</p> |
| <p>問題を見いだす</p> <p>T：「今は60°のときの高さを求めましたが、はしご車で救助することを考えると気になるのは何でしょうか。」</p> <p>S：「今は角度が60°だったのですが、この角度を変えるとどのくらいの高さまで届くかを考えてみたいです。」</p> <p>T：「どの角度について調べますか。」</p> <p>S：「30°と45°ならすぐ求められます。」</p> <p>S：「それ以外は求められないのでしょうか。」</p> <p>S：「いや、縮図をかけば求められるはずです。」</p> <p>S：「どのくらいの高さまで救助できるのか知りたいです。」</p> <p>T：「多くのはしご車では、最大75°まで動くそうです。」</p> <p>S：「そうしたら、75°の時にどのくらいの高さになるか調べたいです。」</p> <div data-bbox="225 1666 1040 1727" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px;"> <p>はしごの角度が75°のとき、高さ何mまで届きますか。</p> </div> | <p>○生徒とやりとりしながら進めて生徒が問題を見いだせるようにする。</p> |
| <p>主に協働的に考える(2)</p> <p>●75°のときの解決</p> <p>S：「∠Aの大きさが75°の時は、直角三角形の辺の比が分かりません。」</p> <p>S：「縮図をかけば高さは求められます。」</p> | |

S：「縮図をかけば，斜辺の長さを何倍すれば高さになるかもわかりそうです。」

T：「 $AB = 1$ のときのBCの長さをある程度正確に求めることができるツールを用意しました。 $AB = 1$ とすることで，高さが斜辺の長さの何倍になっているかがすぐわかります。また，斜辺の長さを1とする縮図をかいたことにもなります。このツールを使って各自で調べてみましょう。」

S： $\angle A$ の大きさが 75° のとき，BCの長さはABの長さの約0.97倍にあたるということか。実際は $AB = 30$ だから…」

S：「0.97ってだいふ1に近いね。」

S：「はしごの長さを1とした縮図なのだから，BCの長さ約0.97を30倍すると考えても求められるね。」

S：「高さは， 30×0.97 をして，2m足すから，約32mとなります。」

T：「約32mと求まりましたね。これは建物にもよりますが大体10階に当たる高さだそうです。」

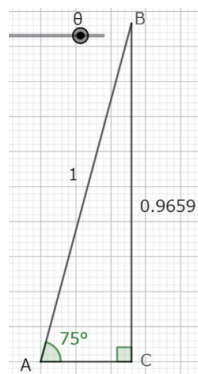
S：「そういえば私が住んでいるマンションは10階建てです。はしご車の届く高さに関係しているのかな。」

S：「でもじゃあもっと高いビルで何か起きたときはどうするのだろう。」

T：「良い疑問ですね。建物の高さに対する見方が以前と変わってきているのではないのでしょうか。気になったことがあれば調べてみるとよいですね。」

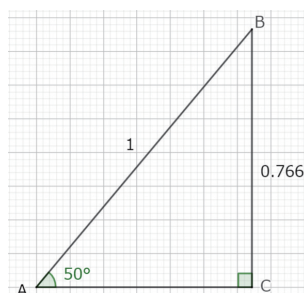
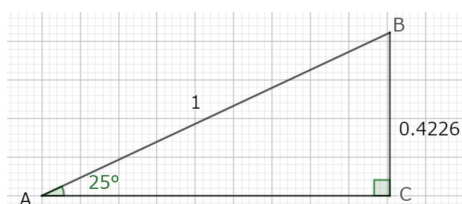
●正弦の導入

T：「 $\angle A$ の大きさが 75° のとき，ABの長さを1とするとBCの長さは約0.97倍の大きさに当たることがわかりました。 $\angle A$ の大きさを他の様々な値に変えてみたときのBCの長さを観察してみましょう。」



学びを深める工夫③

生徒がデジタルツールを用いて観察する



S：「ABの長さを1としたとき， $\angle A$ の大きさがわかれば，BCの長さがABの長さの何倍になっているかがわかるということですね。」

○生徒にファイルを共有し，操作方法を示す。生徒一人一人が作図ツールを使って調べられるようにする。

○元々の問題であるはしごの高さについて解釈する。

○左の図はあくまで例である。生徒がいくつかの場合を調べ， $\angle A$ の大きさを決めればBCの長さが決まることの実感を持てるようにすることに主眼がある。

○併せて三角比の表も紹介する。

| | |
|--|---|
| <p>T：「$\angle C$が直角で $AB = 1$ である直角三角形ABCにおいて、BCの長さは$\angle A$の大きさAで決まります。$AB = 1$ であるときのBCの長さを$\angle A$の正弦またはサインといい、$\sin A$と表します。例えば上記の場合で0.4226…は$\sin 25^\circ$と表し、0.7660…は$\sin 50^\circ$と表すということです。」</p> | <p>○本事例では左記のように正弦を定義したが、その意図については解説における実践上のポイントに記した。</p> |
| <p>振り返る</p> <p>T：「今日の授業で大事だと思ったことは何ですか。また、今日の授業を踏まえると、次にどんなことを考えてみたいですか。振り返り用紙に記しておきましょう。」</p> | <p>●知識・技能：二つの辺の比の値に着目して、三角比（正弦）の意味を理解できたか。</p> <p>[振り返りシート]</p> |

事例3の解説

1. 事例作成の意図

本事例は、数学の学習に課題のある生徒たちにも配慮した事例として作成した。

鋭角の三角比の定義については、数学の学習に課題のある生徒たちであっても、正弦、余弦、正接の定義を記憶し、その値を求めることは比較的可能である。しかしながら、この値の意味を理解できていない生徒が少なくない。また、中学校で学習する比例式を解くことはできたとしても、2つの量を比べる際にどちらか一方を1とみて割合で表すことに課題がある。例えば、定員25人に対して希望者が45人いた場合の希望者は定員の何倍になっているかを求める際に、割合を求めるための式を立てることや、その結果の割合1.8が何を意味しているのかを理解することに難しさを抱えている。

上記の課題を踏まえ、本時では、正弦、余弦、正接を定義することから始めるのではなく、日常の事象の考察を通して、直角三角形ABCにおいて斜辺ABの長さを1としたときの高さBCが $\angle A$ の大きさによって変わることを生徒たちが意識できるようにしながら、生徒たち自身が三角比（正弦）の考えを見いだすことを意図した。その際、直角三角形ABCにおいて斜辺ABの長さを1としたときの高さBCが $\angle A$ の大きさによって変わることを意識できるよう、生徒自身がデジタルツールを動かすことができるようにした。そして、この正弦の導入の授業の中で、「割合」、「比」、「比の値」などの既習事項についての豊かな学び直しの機会としても位置付けた。

このようにして、数学的活動を通して実感を伴う深い理解を促し、将来にわたって生きて働く「知識及び技能」の習得を図ることを意図している。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

本時の始めに、はしご車がはしごを伸ばしていく様子等の動画を見せて、問題場面に対する現実感を高めることで、はしごが高さ何mまで届くだろうかと解決の必要性を生徒が感じる場を設け、目的

意識を持った数学的活動になるようにする。

また、始めの問題提示において、はしごの角度が 60° のときのみを考えさせるようにする。そして、個別に考えたり、協働的に考えたりする中で、「他の角度のときはどうなるだろうか」「角度を変えて考えてみたい」という思いを引き出した上で、「はしごの角度を最大の 75° と設定すると、高さ何mまで届くか」について扱うようにする。

(2) 学びを深める工夫

第一に、三角形を見だし数学の問題として定式化する過程について話し合い、生徒が数学的な見方・考え方として意識できるようにするために、問題の図（直角三角形）を与えずに、生徒にかかせるようにする。そして、生徒が問題の条件や情報を整理していく際、問題の解決に必要な直角三角形を見だししていく過程を大切に、はしごを線分とみなすなど理想化・単純化を図ろうとする生徒の姿を価値付けていく。こうした指導が、数学的リテラシーの定義にもあるように、現実世界のさまざまな文脈の中で問題を解決するために数学を定式化する能力を身に付けることにつながると考えられる。

第二に、「はしごの角度が 60° のとき、高さ何mまで届くか」という問題に対する、縮図を用いる考え（例①や②）や直角三角形の辺の比を用いる考え（例③や④）のよさを話し合うことを通して、1つの三角形の中での辺の比に着目させ、正弦を見いだすことにつなげる。特に、斜辺（はしごの長さ）を基準としたときに高さが何倍になっているのかという考えの生徒がいれば、積極的に取り上げ価値付けるようにする。そうした考えの生徒がいなかった場合は、「はしごの角度が 60° のとき、はしごの長さから高さを求めることができないか」などと問うことが考えられる。

第三に、実感を伴う正弦の意味の理解を促すために、生徒にデジタルツールを利用して、斜辺の長さを1とする直角三角形ABCにおいて $\angle A$ の角度を変えたときのBCの長さ（図2-3-1）を観察させる。なお、上で述べたように、本事例では意図的に問題の図を与えていないが、個別の考えを共有した際（主に協働的に考える(1)）に、どんな直角三角形に着目しているかを明確にするために、デジタルツールを用いてはしごの角度や長さを変えたときの高さ（図2-3-2）を観察させることも考えられる。

なお、本事例では、 $AB = 1$ であるときのBCの長さを $\angle A$ の正弦として定義している¹⁶。割合の理解に課題がある生徒は、

比の値 $\frac{BC}{AB}$ の意味を理解することが難しく、

そのことが三角比の理解に困難を感じる一因となっていると考えられる。この点、上記のように定義すると、ABの長さを1としたときBCの長さがどれだけの大きさに当たるかを、比の値ではなくBCの長さとして直接的に表現できる。また、ABの長さが c の直角三角形においては、図2-3-3の直角三角形の各辺を c 倍して $BC = c \sin \theta$

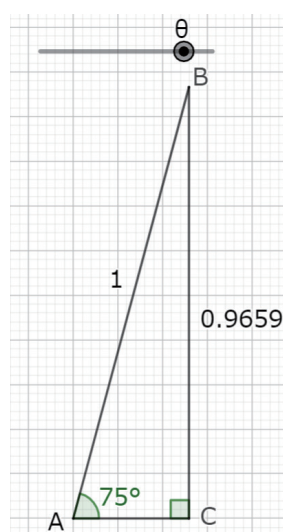


図2-3-1

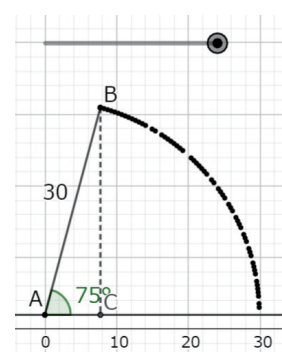


図2-3-2

であることが自然に導かれるため、三角形の辺の長さを求める際に三角比を使いやすくなることを期待できる。なお、 $AB = c$ 、 $BC = a$ のとき斜辺の長さを1にするために各辺の長さを $\frac{1}{c}$ 倍すれば $\sin \theta = \frac{a}{c}$ であることが導かれる。加えて言えば、数学Ⅱ「三角関数」において登場する単位円とも接続しやすいと考えられる。

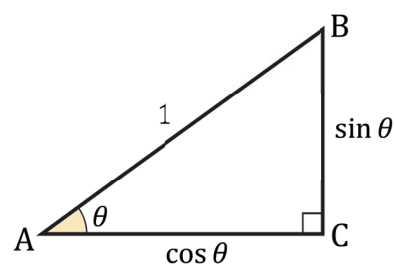


図2-3-3

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本時の問題は、2022年度の大学入学共通テストの追・再試験で扱われた題材を基にしている。その試験では、①はしごの角度を 75° まで大きくすることができる時の、はしごの先端の最高到達点を求める問題や、②はしごを屈折することができるはしご車において、障害物があったときの屈折の角度やはしごの先端の最高到達点を問う問題が出題された。生徒の実態に応じて、①については本時の類題として、②については、「図形と計量」のまとめの問題として扱うことなどが考えられる。
- 本事例は単元「鋭角の三角比」の第1次の導入に位置づくものであるが、「鋭角の三角比を活用して具体的な場面の問題を解くことにより、三角比の有用性を認識すること」をねらいとする第2次に扱うことも考えられる。
- 余弦を学習した後、例えば次のような問題に取り組むことも考えられる。

消防活動場所に無断駐車の手が停車していて、建物まで20mまでしか近づけない場合、最大どのくらいの高さまで救助することができるか。

(考えられる解答)

$$\cos \theta = \frac{20}{30} = 0.6666\cdots$$

三角比の表などより、 $\theta \doteq 48^\circ$

$\sin 48^\circ = 0.7431$ であるから、求める高さは、 $30 \times 0.7431 + 2 = 22.293 + 2 = 24.293$

よって約24m

16 『高等学校学習指導要領（平成30年告示）解説 数学編 理数編』には、「三角比における基本的な用語・記号の意味を確実に定着させるために、鋭角の三角比の意味を多面的に理解できるようにする。例えば、 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形ABCにおいて、 $\sin A = \frac{BC}{AB}$ を、ABの長さを1としたときのBCの長さと考えことや、ABの長さに対するBCの長さの割合と考えることが考えられる」とある（pp.38-39）。

事例
4

数学を活用して日常の事象を
考察する力を身に付ける事例

本事例のポイント

- 日常の事象を数学的に捉え、問題を解決する際に、既習内容である二次関数を活用できるようにすることを目指す。
- デジタルツールを利用するからこそ深い学びを生む。
- 教育課程の工夫によって、情報科や総合的な探究の時間と関連付けることも可能である。

販売価格はいくらにすればよい？【数学Ⅰ・二次関数の最大と最小】

本時の問題

数好高等学校は、毎年、トートバッグを学校祭で販売しており、利益は自校も参加する地域ボランティアの活動費として寄付している。過去の学園祭での販売価格と販売数のデータは下表のとおりである。



| | | | | | | | | | |
|----------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| 販売価格 (円) | 1440 | 1560 | 1800 | 1920 | 2160 | 2400 | 2520 | 2640 | 2760 |
| 販売数 (個) | 496 | 455 | 385 | 317 | 261 | 162 | 150 | 118 | 100 |

今年は、版代3,000円で、1個当たりの作成費が1,500円である業者に製作をお願いすることにした。

寄付する額をなるべく多くするには、販売価格をいくらにするか。

●平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学Ⅰ(3)イ(イ)二つの数量の関係に着目し、日常の事象や社会の事象などを数学的に捉え、問題を解決したり、解決の過程を振り返って事象の数学的な特徴や他の事象との関係を考察したりすること。

●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 事象の数量等に着目して数学的な問題を見いだす力 (A1)

●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・ 実社会の問題の中から、数学的な側面を見付けること
- ・ 数学的モデルの背景にある条件や仮定が分かること
- ・ コンピュータの数学的機能（例：表計算ソフト、プログラミング・ソフト、グラフ電卓）を使うこと

1. 単元における本時の位置付け

単元名「二次関数の最大と最小」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|--|-------|
| 第1次 | <ul style="list-style-type: none"> 二次関数の最大値や最小値を求める 日常の事象や社会の事象などの問題解決に二次関数を活用する（本時は1/5） | 5時間 |

2. 本時の目標

- 日常の事象や社会の事象などの問題解決に二次関数とそのグラフを活用することができるようにする。（思考力、判断力、表現力等）
- 事象を二次関数を用いて考察するよさを認識し、問題解決に活用しようとしたり、数学的論拠に基づいて判断しようとしたりする態度を養う。（学びに向かう力、人間性等）

3. 本時の授業過程の例

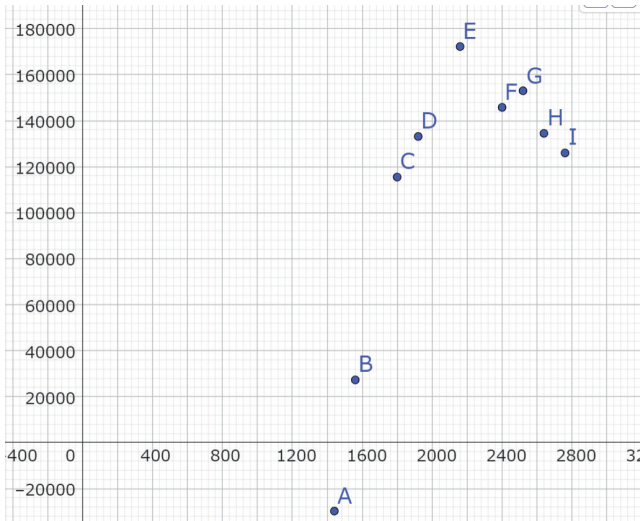
※以下の授業過程では、数学の思考ツールとして表計算ソフトやグラフ作成ツールを使って考察することをこれまでも経験している生徒を想定する。

| 主な発問（T）生徒の学習活動及び予想される生徒の反応（S） | 評価（●）・留意点（○） |
|--|---|
| <p>問題を見いだす</p> <p>T：（問題の状況を説明した後）「寄付する額をなるべく多くするには、何を考えたらよいと思いますか。」</p> <p>S：「たくさん売れるようにしたいです。」</p> <p>S：「利益を増やしたい。価格を高くすれば、そこまで売れなくても利益は出るかもしれません。」</p> <p>S：「でも反対に、価格を安くしすぎると、たくさん売れても利益は出ないような気がします。」</p> <p>S：「ふつう、価格が上がると販売数は減ると思います。表もそうになっています。」</p> <p>T：「そうになると、何を考える必要がありますか。」</p> <p>S：「利益が最大になるような価格を予想する。」</p> <p>S：「価格によって販売数が変わるのが悩ましい…」</p> <p>T：「そこを考慮する必要がありますね。では、表のデータをもとに、利益が最大になる販売価格を予想する方法を考えてみましょう。」</p> | <p>○問題場面に対して、数学を活用するとよさそうだという考えを引き出す。</p> <p>○利益が最大となるときの販売価格について考えることに気付かせる。</p> |
| <p>主に個別に考える(1)</p> <p>●販売価格に応じた利益を求める反応例</p> <p>・例①：（販売価格－作成費）×販売個数 を計算するなどして利益を計算し、2,160円付近であると判断する。</p> | <p>○生徒は表計算やグラフ描画できるツールが手元にある前提である。</p> |

目的意識を持たせる工夫
身近な場면을扱い、生徒と問題を見いだす

| | | | | | | |
|-----------|--------|-------|--------|--------|--------|--------|
| 販売価格 | 1440 | 1560 | 1800 | 1920 | 2160 | 2400 |
| 販売価格－作成費 | -60 | 60 | 300 | 420 | 660 | 900 |
| 販売個数 | 496 | 455 | 385 | 317 | 261 | 162 |
| 利益＝売上額－版代 | -29760 | 27300 | 115500 | 133140 | 172260 | 145800 |

・例②：販売価格と利益のデータを座標平面に表して、2,160円付近であると判断する。

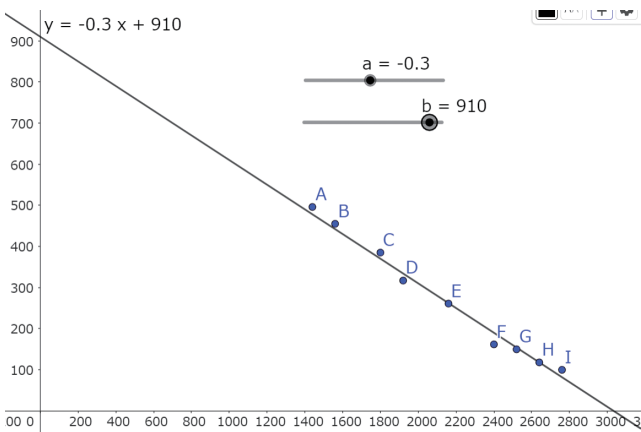


●販売価格（ x ）と販売数（ y ）の関係を調べる反応例

・例③：表から販売価格を120円値上げすると販売数が40個減るとみなし、表の値（例えば2,520円のととき150個販売）を用いて

$y = -\frac{1}{3}x + 990$ とする。

・例④：表のデータを座標平面に表し、それをもとに、販売価格（ x ）と販売数（ y ）の関係を式に表そうとする。



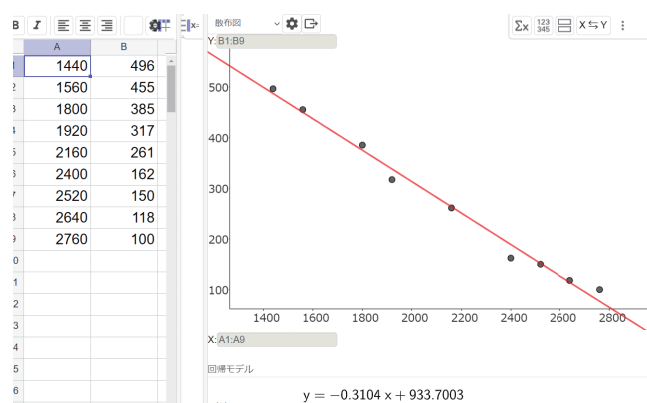
点の並びから1次関数の関係にあると判断し、 $y = ax + b$ の a や b を動かしながら点の並びにフィットするような直線の方程式を探す。

●主体的に学習に取り組む
態度：日常や社会の事象について、二つの数量の
関係に着目し、数学的論
拠に基づいて判断しよう
としているか。

○思考が進まない生徒に
は、題意を踏まえて、ど
んな数量の関係に着目し
て調べてみるとよさそう
かを確認する。

○前時までに、例えば
 $y = ax^2 + bx + c$ の a, b, c
の変化に伴うグラフの変
化をグラフ作成ツールを
用いて調べており、スラ
イダーによって係数を変
化させた経験がある前提
である。

- ・例⑤：表計算ツールを利用し、回帰直線 $y = -0.31x + 933.7$ を求める。



- ・例③④⑤のようにして定めた販売価格と販売数の関係をもとに、販売価格と利益の関係を関数に表し、グラフに表すなどして利益が最大になるときの販売価格を求める。

利益を $R(x)$ とすると、 $R(x) = (x - 1500)(ax + b) - 3000$
($ax + b$ は各自が求めた販売価格と販売数の関係)

○価格と販売数の関係に着目したもの、利益に着目していない生徒には、「何のためにこの1次関数を求めたのか」や「ここからどのようにしたら利益を求められるか」を問うなどする。

主に協働的に考える(1)

●考えと結果の共有

学びを深める工夫①

様々な考えを共有し、関連付ける

S(例①や例②)：「データから利益を求め、それぞれの販売価格を x 座標、利益を y 座標とする点を座標平面に表してみました。」

S：「上に凸の放物線に見えなくもない。」

S(例③～⑤など)：「価格が高いほど販売数が減ると言っていたので、その関係を調べてみたら、1次関数で表せそうでした。そしてその関係を使って、価格と利益の関係を表すことができました。」

$$\text{例：} R(x) = (x - 1500) \left(-\frac{1}{3}x + 990 \right) - 3000$$

$$R(x) = (x - 1500)(-0.31x + 933.7) - 3000$$

$$R(x) = (x - 1500)(-0.3x + 910) - 3000 \quad \text{など}$$

T：「これらの式を見てどう思いますか。」

S：「どれも2次関数になっています。」

S：「価格と販売数の関係が1次関数なら、価格と利益の関係は2次関数になるということか。」

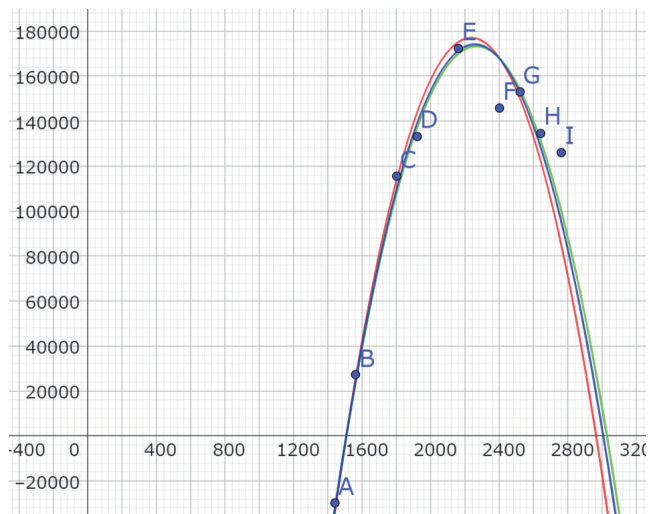
S：「価格と販売数の関係の式が人によって違うから、利益の式も違ってきます。」

S：「これらの2次関数のグラフをかいたら、さっき発表してくれた点(例②)の近くを通るということですか？」

T：「確かめてみましょう。」

○個別に考える時間の活動を共有する時間とする。

○互いの考え方を比較しやすいように、各自の考えは結論だけではなく根拠も説明させるようにする。



S：「3つともそんなに変わらないように見えます。」

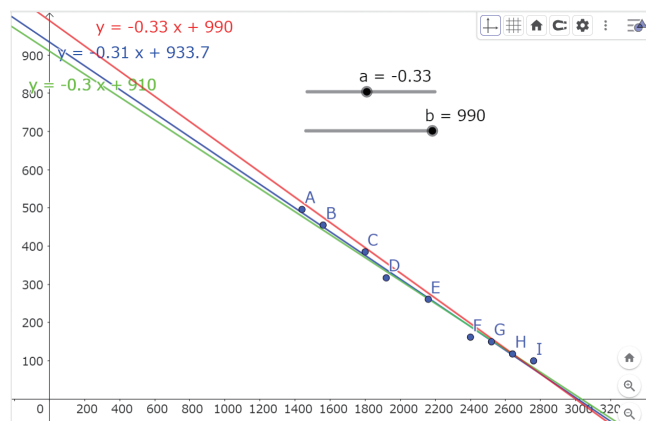
T：「大差はないように見えますね。これらの2次関数の式の違いは、さっき言ってくれたように、販売価格と販売個数の関係を表す1次関数の違いによるものです。そのことも踏まえて、もう一度、利益が最大になる時の販売価格を考えてみましょう。」

主に個別に（小グループで）考える(2)

●どの関数を用いるかを定める

学びを深める工夫②

デジタルツールを使って理解する



○ここでは、全員がデジタルツールを用いて考えることができるよう、左記のファイルを全員に配布する

S：「私が表から考えた $y = -\frac{1}{3}x + 990$ の直線は点の上の方を通るんだな。」

S：「売れ残るのは避けたいから、点より低めに来るような直線で考えておいた方がいいかもしれない。」

●放物線の頂点の座標を求める

S：「1次関数の部分を $y = -\frac{1}{3}x + 990$ としたとき、平方完成をすると、 $R(x) = -\frac{1}{3}(x - 2235)^2 + 177075$ だから、 $x = 2235$ のときが最大で、そのときの $R(x)$ の値は 177075 になる。」

●思考・判断・表現：問題解決に二次関数が活用できるか。

[ワークシート]

| | |
|---|---|
| <p>S：「1次関数の部分が $y = -0.31x + 933.7$ の場合でグラフ作成ツールを使ったら、頂点の座標が (2255.97, 174161.04) だとわかった。」</p> <p>(なお、平方完成せずに式から放物線の頂点の座標を求めることも考えられる。解説の「さらなる指導の充実に向けて」参照)</p> | <p>○授業の導入では理解が進んでいない生徒も、二次関数を活用して問題を解決すること、最も利益が大きくなるところが頂点であることに着目するという考え方を周囲との対話の中で獲得させる。</p> |
| <p>主に協働的に考える(2)</p> <p>T：「では、最終的に、販売価格はどうしましょうか。」</p> <p>S：「2,250円がいいと思います。」</p> <p>S：「$-\frac{3}{10}x + 910$ を使った式で計算してみたら、2,250円の時の利益は173,250円、2,300円ときは173,000円で、そこまで変わらないから、購入のしやすさを考えると2,300円でいいかもしれません。」</p> <p>S：「それなら安いほうが売れそうだから2,250円でもいいのではないかな。」</p> | <p>○これはあくまで1つの結論であり、ここに必ず行きつくべきという意図ではない。</p> |
| <p>振り返る</p> <p>●本時で学習したことの確認</p> <p>T：「今回はどのようにして問題を解決しましたか。」</p> <p>S：「利益が最大にする価格を調べるために、それらが2次関数の関係にあるとして、2次関数の式とグラフを使って解決しました。」</p> <p>T：「なぜ、2次関数で表せると、利益が最大となる価格を決めることができるのでしょうか。」</p> <p>S：「今回の2次関数のグラフは上に凸の放物線になるので、頂点で利益$R(x)$が最大になり、そのときの価格xの値は頂点のx座標であるとわかります。」</p> <p>T：「2次関数の最大値を調べたことになりましたね。次の時間からは2次関数の最大と最小について深めていきます。ところで、販売価格と利益の関係はなぜ2次関数で表せたのでしょうか。」</p> <p>S：「販売価格と販売数の関係を1次関数とみなしたからです。」</p> <p>T：「そうした仮定をしたから2次関数で表せて、解決が進んだのですね。一方で、今回得られた結果は、あくまでその仮定に基づくものだということですね。」</p> <p>S：「そうか、じゃあ販売価格と販売数の関係が1次関数じゃなかったらどうなるんだろう。」</p> <p>T：「良い疑問ですね。課題として残しておきましょう。」</p> <p>●振り返り</p> <p>T：「今日の授業でポイントは何だと思いますか。今日の授業から次に考えてみたいことや疑問に思ったことは何ですか。振り返りシートに書いてください」</p> | <p>○「今回は販売価格と販売数に着目したが、もっと様々な要素が関わる場合はどのように考えるのだろうか」といった問題などを課題としておくことなども考えられる。</p> <p>●主体的に学習に取り組む態度：二次関数を用いて考察するよさを認識しているか。</p> |

事例4の解説

1. 事例作成の意図

中学校数学において、具体的な事象の中から観察や操作、実験などによって取り出した二つの数量について、事象を理想化したり単純化したりすることによって、それらの関係を関数とみなし、そのことを根拠として変化や対応の様子を考察したり予測したりすることを取り扱っている。このことを踏まえて、高等学校数学では、何を明らかにしようとするかという目的を明確にした上で、二つの数量の関係に着目し、関数として捉え、関数の値の変化等を考察したり、関数の最大値や最小値を求めたりすることで、事象から見いだした問題を解決できるようにすること、さらに、こうした問題発見・解決の過程を通して、関数について深く理解させることが大切である。そこで、本事例では、利益を最大にしたいという目的のもと、利益を決める変数として販売価格に着目して解決を進め、その過程において、ここまで学習してきた二次関数とそのグラフについて深く理解することを意図した。

また、ある数量について調べようとするとき、それと関係が深い他の数量を見いだし、それらの数量との間に成り立つ関係を明らかにして、その関係を利用することは、大切な数学的な見方・考え方である。この数学的な見方・考え方を働かせたことによって、日常の事象や社会の事象に関わる問題発見・解決の過程（PISAの「数学的プロセス」）が進んだということを生徒が意識できるようにしたい。この点は、本事例の授業過程におけるまとめ（振り返り）に特に反映させた。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

生徒にとって身近な場面から、「寄付する額をなるべく多くするには、販売価格をいくらにするか」という問題を生徒たちとともに見いだすようにする。生徒の実態によっては、売上を問うてから利益を考察させたり、「利益が最大になる場合の販売価格」を直接的に問うたりすることも考えられるが、いずれにせよ、生徒たちとともに目的（例えば利益を最大にすること）を確認し、そのための販売価格を決めたいという問題をともに見いだすようにすることが大切である。

なお、本事例では、寄付額をなるべく多くするためにはいくらで販売したらよいか、つまり、いくらで販売したら利益が最大になるかというテーマを扱ったが、総合的な探究の時間や文化祭・学校祭などの学校行事の場面など、各校で現実にある場面に変更することで、一層、目的意識を持たせることができると思われる。

(2) 学びを深める工夫

第一に、問題解決へのアプローチは生徒に委ね、問題解決の結果や過程などについて説明し伝え合う場面を設け、お互いの考えを改善したり、一人では気付くことのできなかったことを協働して見いだしたりするようにする。本事例では、大きくは、販売価格と利益の関係を直接的に調べる考え（例①②など）と、販売価格と販売数の関係を調べてからそれを生かす考え（例③④⑤など）が想定されるが、これらを取り上げ、関連付けることで、販売価格と販売数の関係を一次関数とみなせば、販売価格と利益の関係は二次関数とみなせることが見えてくる。

第二に、表計算やグラフ作成ツール等のデジタルツールを利用し、販売価格と販売数や、販売価格と利益の関係を表す関数を評価することである。これは、データに対する関数のグラフのフィッティングについての観察だけでなく、「売れ残るのは避けたいから、点より低めに来るような直線で考えておいた方がいい」といったような事象に照らして解釈し、判断する契機となる。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例で扱う二次式は比較的複雑であり平方完成しにくいことから、式を多面的に見て工夫を図る機会となる。例えば放物線 $R(x) = (x-1500)\left(-\frac{3}{10}x+990\right)-3000$ の頂点の x 座標は、平方完成せずとも、 $y = (x-1500)\left(-\frac{3}{10}x+990\right)$ において $y = 0$ として x 軸との共有点の x 座標を求められることを利用して求めることが可能である。このようにして頂点の座標を求めることは、既習のグラフの平行移動を生かすとともに、この後の二次関数と二次方程式・二次不等式の関係の学習にもつながる。
- 本事例では、二次関数の最大と最小について学んでいく目的意識を持たせることも意図し、単元「二次関数の最大と最小」の最初に本時を設定している。一方で、第1次の最終に扱うことも考えられる。
- 本事例では販売価格と販売個数に着目したが、現実の場面を想定したときに、他にどのようなことを考慮する必要があるかを考えたり、他の要素が加わった場合はどのようにアプローチするかを考えたりするなど、発展的に扱うことも考えられる。例えば、提示する販売価格と販売数のデータに対して、それが何年分のデータなのか、同じ販売価格でも販売数にはばらつきがあるのではないかと考え、それぞれの販売価格に対する販売数の平均と標準偏差を提示することも考えられる。その際、数学Iのデータの分析や数学Bの統計的な推測、さらには、総合的な探究の時間と関連させることが考えられる。さらに、情報Iで単回帰分析、情報IIで重回帰分析を学習しているのであれば、それらと関連させることも考えられる。

事例
5データに基づいて日常の事象を
考察する力を身に付ける事例

本事例のポイント

- データの散らばりに着目して指標をつくったり，つくった指標を批判的に考察したりする力を養う。また，その過程で，標準偏差を用いてデータを分析することのよさを感じ得させることを目指す。
- 生徒に身近な，異なる変量の中にある二つの値の比較を考える場面を与えることで，生徒の問題意識を高める。
- デジタルツールの使用を前提として，グループで試行錯誤しながら協力して分析したり説明しあったりすることによって，多様な生徒が主体的に取り組むことを可能にする。

男女の記録の比べ方を考えよう【数学Ⅰ・分散と標準偏差】

本時の問題

ある高校では1年生全員がマラソン大会で8kmを走って記録をとり，最も活躍した生徒を校長賞として表彰してトロフィーを授与することになった。

男子の記録1位である26分14秒で走ったケンさんと，女子の記録1位である31分56秒で走ったレイさんの2人が校長賞の候補である。ケンさんとレイさんのどちらを校長賞とするかをどのように決めればよいだろうか。



※本時の問題で用いるデータについては，参考として，ダウンロード可能にする予定である。

●平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学Ⅰ(4)イ(7)データの散らばり具合や傾向を数値化する方法を考察すること。

●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 事象の特徴を捉えて数学的な表現を用いて表現する力 (A1)
- ・ 様々な事象に活用する力 (D1)

●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること。
- ・何か決定を行うときに、統計上のばらつきの考え方をを用いること。

1. 単元における本時の位置付け

単元名 「分散と標準偏差」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|--|-------|
| 第1次 | 平均も範囲も等しい二つの変量について、どちらの方が散らばっているかを数値で判断する方法を考える。 | 2時間 |
| 第2次 | 分散と標準偏差を導入するとともに、その性質について表計算ソフトなどを用いて考察する。 | 2時間 |
| 第3次 | 平均も散らばりも違う二つのデータについて、それぞれのデータに含まれる特定の値を比べるための方法を考える。(本時は1/2) | 2時間 |

2. 本時の目標

- 二つの値を比較するに当たって、データの散らばり具合に着目し、それを妥当な方法で数値化する方法を考察できるようにする。(思考力、判断力、表現力等)
- 異なるデータの中にある値を比べる方法を粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたり、導いた方法を評価・改善したりしようとする態度を養う。(学びに向かう力、人間性等)

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|---|---|
| <p>問題を見いだす</p> <p>T:「(マラソン大会で最も活躍した一人に対して校長賞が与えられることを説明した上で)どのようにして決めるといいでしょうか。」</p> <p>目的意識を持たせる工夫 解決すべき問いを生徒と見いだしていく</p> <p>S:「一番の記録を出した人がいいと思います。」</p> <p>S:「でも全体的に男子の方が速いからそれだと不公平な気がするよ。全体の一位は男子でも、女子の中で飛び抜けた記録の人がいて女子の方がすごいということもあり得るのではないかな。」</p> <p>T:「例えば、男子の記録1位はケンさんの26分14秒、女子の記録1位はレイさんの31分56秒だったら、ケンさんとレイさんのどちらを校長賞とすべきでしょうか。」</p> <p>S:「やっぱり男子の方が速いからケンさんにすべきです。」</p> <p>S:「他の生徒の記録を見てみると、どちらがすごいかかわかると思っています。」</p> | <p>○生徒とやりとりしながら進めて生徒が問題を見いだせるようにする。</p> <p>○まずはケンさんとレイさんの記録のみを示し、男女で分布の仕方が違うのでデータ全体を見たいという反応を引き出した。</p> |

S:「男女それぞれのデータからケンさん、レイさんの記録の『すごさ』を数値で表せるといいね。」

男女別に分類されたマラソン大会の記録を各自のデバイスで見られるようにする。

T:「男女130名ずつ260名のデータに基づいて、ケンさん、レイさんの記録の『すごさ』を数値で表して比較し、どちらの生徒を校長賞とするか決めよう。」

○やり取りを経てデータを配布し、本時の問題を提示する。配布するデータは男女別で秒に換算されたものを想定しているが、男女の層別や秒への換算を授業内で扱うことも考えられる。

主に個別に考える(1)

男女別のデータからケンさん、レイさんの記録の「すごさ」を数値で表して比較し、どちらの生徒を校長賞とするか決めよう。

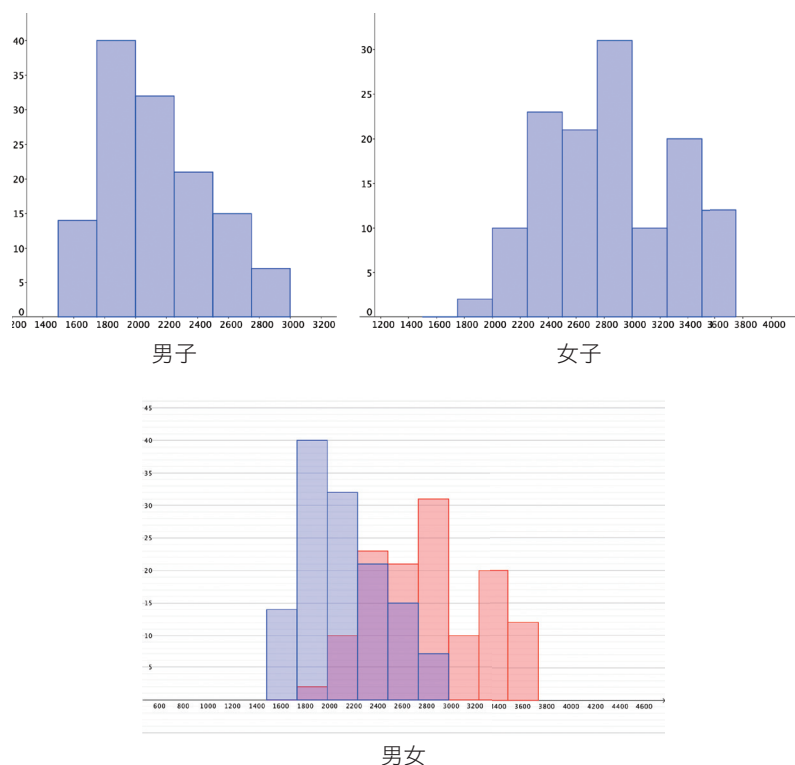
※以下、 x はデータの中の特定の値、 m は平均値、 s は標準偏差を表す。

●平均値と比較する反応例

- ・例①：男女別でそれぞれの平均値との差を考える。
- ・例②：男女別でそれぞれの平均値との比を考える。
- ・例③：平均値を男女でそろえたときの値の大きさを比較する。

●データの分布を見ようとする反応例

- ・例④：男女それぞれのヒストグラムをかくて比較する。



○表計算ソフト等を用いてデータを扱いながら問題解決に取り組む。ペアやグループごとの活動にすることも考えられる。

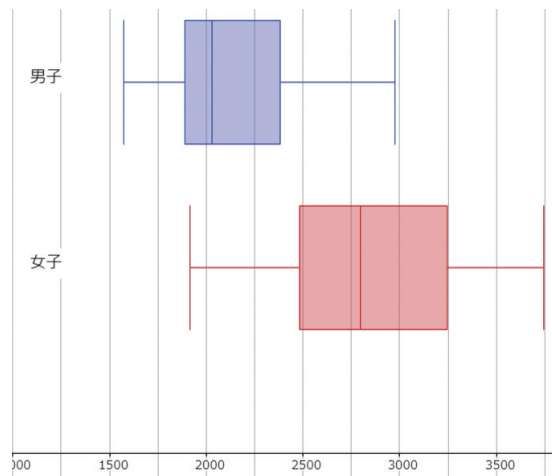
○平均値との差や比で考えている生徒には、平均値と最大値だけ決まれば「すごさ」がわかるかを問い、分布に目を向けさせる。

○平均値に着目している生徒が多ければ、全体で平均値を確認してもよい。

●主体的に学習に取り組む態度：2人の記録の「すごさ」を数学的に表現する方法について数学的論拠に基づいて粘り強く考えようとする取組を取り上げ、価値付ける。

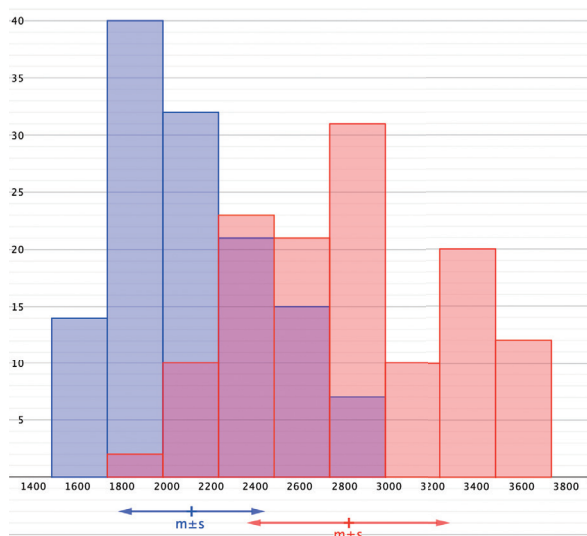
○ヒストグラムや箱ひげ図をかくて止まっている生徒には、男女のデータの相違点を考えさせ、散らばりに着目させる。これらの図を教室全体で共有し、「2つのデータの違いは何か」を問う展開も考えられる。

- ・例⑤：男女それぞれの箱ひげ図をかいて比較する。



- 男女それぞれのデータの散らばりに着目する反応例

- ・例⑥：女子のデータの方が散らばっていて範囲が広い。
- ・例⑦：女子のデータの方が分散や標準偏差が大きい。
- ・例⑧：ヒストグラムの下に平均値や標準偏差の範囲を示す。



- 思考・判断・表現：男女の記録のデータの散らばりの違いに着目している取り組みを価値付ける。

[ワークシート]

主に協働的に考える(1)

- 考えの共有

学びを深める工夫①

2つの値を比較する方法について批判的に検討し、データの散らばりに着目させる。

まずは、散らばりを考慮せずに平均値との比較をしている考え（例①～③など）を共有する。

S：「 $m-x$ を計算すると男子が約555秒，女子が約920秒だから女子の方が平均と比べてより速いと言えそうだよ。」

S：「でも，ヒストグラムを見ると，全体的に女子のデータの方がばらついていることがわかるから，平均値との差を考えると女子の方が有利になっちゃうんじゃないかな。」

- 平均値との差などの単純な考えから紹介し，妥当性について批判的に検討させる。

- 「データ全体を見なければ比較できない」という意見を取り上げる。出てこなければ極端な分布の例を含めて教師から提示する。

| | |
|---|---|
| <p>S:「そうしたら、男女でデータの平均が揃うように、例えば女子のデータ全体に $\frac{\text{男子のデータの平均値}}{\text{女子のデータの平均値}}$ をかけて平均を揃えて比べればいいんじゃない？」</p> <p>S:「それで平均が揃ったとしても、女子の方がやはりデータは広がっているような気がするけどそれで比べられるのかなあ。このデータだとそこまではないけど、男子と女子ではデータの広がり方が全然違うということもあり得るよね。」</p> <p>T:「いま、このデータでない場合を考えてくれたように、数値化の方法（指標）の妥当性を考える上では、このデータだけでなく別のデータでも使えるかを考えるのはよいことですな。」</p> <p>次に、データ全体を見ている反応（例④、⑤など）、2つのデータの散らばり具合に着目した反応（例⑥～⑧など）を共有する。</p> <p>S:「男女それぞれのデータの箱ひげ図や、重ねたヒストグラムを見るとデータの散らばり方が違うよ。」</p> <p>T:「仮にケンさんの記録と男子の平均値との差と、レイさんの記録と女子の平均値との差が等しかったとして、データの散らばりは女子の方が大きいとすると、どちらの記録がより『すごい』と言えるのだろうか？」</p> <p>S:「例えばみんなが平均付近で1人だけすごく速かったら『すごい』と言えるし、ある程度散らばっている中だったらそこまですごくはないのかもしれないね。」</p> <p>T:「男女それぞれのデータで散らばりが違うことがわかりました。同じ偏差だとしても、データの散らばりが小さければより『すごい』ということになりますね。では、散らばりを考慮した上で、ケンさんとレイさんの記録の『すごさ』を数値化する方法を考えましょう。」</p> <p>S:「散らばりを表す数値として範囲や四分位範囲、分散や標準偏差を学んだけど使えるかなあ。」</p> | <p>○散らばりに着目した考えが見られなければ、「ケンさんとレイさんの『すごさ』を比べるにあたって、男子のデータと女子のデータ全体では何が違うと言えるのだろうか」といった補助発問をする。</p> <p>○例⑧のように、散らばりを考慮してデータ全体の中でのケンさん、レイさんの記録の位置を確かめようとする考えがあれば、そこから数値化する方法を考察する次の問いにつなげるということも考えられる。</p> |
| <p>主に個別に考える(2)</p> <div><p>男女別データの散らばりの大きさの違いを考慮して、ケンさん、レイさんの記録の「すごさ」を数値化して比較しよう。</p></div> <ul style="list-style-type: none">・例⑨：外れ値の学習を想起し、中央値（または第1四分位数）から四分位範囲や範囲との比を考える。・例⑩：散らばり具合を表す基準として分散を用いて、偏差と分散の比（分散に対する偏差の割合）で比較する。・例⑪：散らばり具合を表す基準として標準偏差を用いて、偏差と標準偏差の比（標準偏差に対する偏差の割合）で比較する。・例⑫：2つのデータで散らばり具合を揃えるために、全データを標準偏差で割り、偏差を比較する。 | <p>○数値化のアイデアが出ない場合には、外れ値の学習で「四分位範囲の1.5倍」という基準を用いたことを想起させる。</p> |

| | |
|---|--|
| <p>主に協働的に考える(2)</p> <p>● 考えの共有</p> <div data-bbox="582 302 1029 414"> <p>学びを深める工夫② 散らばりの大きさを考慮した指標について、その妥当性を考えさせる。</p> </div> <p>2つのデータの散らばりを考慮して「すごさ」を数値化している考え（例⑨～⑫など）を共有する。</p> <p>S：「分散は偏差を2乗していて単位が違うので、分散との比を考えてもダメなんじゃないかな」</p> <p>S：「範囲や四分位範囲、標準偏差であれば偏差との比を求めることで散らばりを考慮した『すごさ』が表せそうだね。」</p> <p>S：「範囲も四分位範囲もすべてのデータの値の大きさを反映しているとは言えないから、色々な場面で使えるようにということを考えると標準偏差を用いるのがいいのかなあ。」</p> <p>S：「偏差と標準偏差の比は、『平均から標準偏差いくつ分離れているか』を表していると言えるね。」</p> <p>S：「ケンさん、レイさんそれぞれについて $\frac{x-m}{s}$ の値を計算すると、ケンさんはおよそ-1.7、レイさんはおよそ-2.0だよ。なので、ケンさんは平均より標準偏差の1.7倍分だけ速くて、レイさんは平均より標準偏差の2.0倍分だけ速いからレイさんの方が『すごい』と言えるんじゃないかな。」</p> <p>S：「偏差と標準偏差の比で考えれば、散らばり方が違う2つのデータの中の値を比べる別の場面でも使うことができそうだね。」</p> | <p>○標準偏差はデータの「散らばりの程度」を示す尺度であるから、これを基準として、あるデータが平均値からどれだけ離れているかを表すことができるということを確認する。</p> |
| <p>振り返る</p> <p>● 振り返り</p> <p>T：「今日の授業で大事だと思ったことは何ですか。また、今日の授業を踏まえると、次にどんなことを考えてみたいですか。振り返り用紙に記しておきましょう。」</p> | <p>●思考・判断・表現：標準偏差を考慮して平均値との差を数値化している。 [ワークシート]</p> <p>●主体的に学習に取り組む態度：異なる変量の中の値を比較する際に大事なこと（データの分布を考える、散らばりを考える、標準偏差は偏差を測る基準となることなど）について言及している。 [振り返りシート]</p> |

事例5の解説

1. 事例作成の意図

現代において、データを扱うための基本的な素養を身に付けることは不可欠である。標準偏差は、データの散らばり具合を表す代表的な尺度として様々な分析において用いられる、データを扱う上で欠かせない統計量である。したがって、すべての高校生にその意味と意義を理解させ、様々な場面で活用できるようにしていく必要がある。しかし、データ全体の散らばり具合を比較することが高校生の関心の対象となりやすいかという、決してそういうわけでもない。例えば、英語と数学のテストの点数の散らばり具合を比較するような問題において、個々の点数の良し悪しは大いに関心の対象となり得るものの、英語と数学の得点のデータ全体の散らばりは関心の対象になりにくい。

このような課題に対して本事例では、属性の異なる2つの集団の中にある特定の値の比較を考える文脈の中で、自らデータの散らばりに着目して標準偏差を用いて妥当な指標をつくり出すことを意図した。本事例において導かれることを想定する指標は標準得点（Z値）であるが、Z値自体の導出を授業の目標としているわけではない。その過程で様々な指標を批判的に捉えたり、データの散らばりに着目したり、標準偏差を用いるよさを認識したりすることをねらいとしている。このように、データの散らばり具合に着目して自ら指標をつくったり、与えられた指標を批判的に考察したりすることも社会を主体的に生きていく上で必要な力であると考えられる。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

生徒に目的意識を持たせるために、「マラソン大会において最も活躍した生徒を表彰する」という生徒にとって身近な場面を取り上げる。「校長賞はどのように決めたらよいか」と問いかけることで、「記録が1位の生徒にすればよい」、「でもそうすると男子が有利になり不公平ではないか」といった意見を引き出し、男子のデータと女子のデータに分けて、それぞれの1位の記録の「すごさ」を数値化するという問題を生徒に見いださせるようにする。

(2) 学びを深める工夫

男女それぞれの集団の中での2つの特定の値の「すごさ」を比べるために、様々な方法が考え出されることが想定される。例えば、次のような議論が行われることが考えられる。

S1：男女別の平均値よりもどれだけ速いかによってどちらが「すごい」か決められるんじゃないかな。

S2：ケンさん、レイさんの記録と男女別の平均値だけで「すごさ」が決められるということだね。平均値が決まっていれば2人以外の記録がどのようになっても同じような「すごさ」と言えるのかな。例えば……

このような議論を通して、考えた数値化の方法について、極端な例を考えるなどして批判的に検討するとともに、データの散らばりに着目しなければ妥当な指標を導くことはできないということを理解させる。

さらに、 $\frac{x-m}{s}$ という指標の妥当性についても考えさせるようにする。この値を、ケンさんあるいはレイさんの記録が「平均値から標準偏差いくつ分離しているかを表している」といった解釈をさせることにより、散らばり具合が変わっても使うことのできる指標としてのよさを認識させるようにする。

また、データの処理に当たってはデジタルツールの使用を前提とする。データの値を用いた計算を行ったり、ヒストグラムや箱ひげ図などを作成したりといった活動はペアやグループで協力して行わせることも考えられる。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例は、単元「分散と標準偏差」において、単元の導入でデータ全体の散らばりを比較する問題などを通して分散や標準偏差を定義し、その後の授業で分散や標準偏差の性質などを扱った後での活用場面として位置付けている。生徒の実態によっては、単元全体を通して追究していく問いとして、この課題を単元の導入時に扱うことも考えられる。その場合には、男女それぞれのデータの散らばりに着目させた後に、これを数値化する方法を考察することを通して分散や標準偏差を導入し、その上で改めて記録の「すごさ」を数値化する方法を考察させるといった展開が考えられる。
- 本時に続き、異なる2つのテストの点数を比較するといった文脈の問題を扱うことによって、本時で学習したことの理解を深めることが考えられる。その際には、標準偏差を「ものさし」にして測ることで比較可能になるということを確認するようにする。生徒の実態によっては、 $\frac{x-m}{s}$ の値を解釈しやすくするために、10倍して50を足した値が社会で使われている偏差値であるということを紹介することも考えられる。
- このあと変量の変換について扱う場合には、本時で導いた $\frac{x-m}{s}$ という指標について振り返り、データのすべての値にこの変換をすることで、分布の形を変えずに平均値が0、標準偏差が1のデータをつくることができるということを扱うことも考えられる。

事例
6数学を活用して判断する力を
身に付ける事例

本事例のポイント

- 確率を用いて事象の起こりやすさを判断し、その判断に基づいて社会の事象に対する自分の考えを述べるができるようにすることを目指す。
- 生徒が、数学の世界における問題解決の結果を日常の事象や社会の事象に活用したり意味付けしたりできるようにすることで、目的意識を持つとともに、数学的な見方・考え方の成長を実感することができる。
- 問題の数値の表現を百分率や分数で表現したり、自然頻度で表現したりできることに加え、表計算ソフトなどのデジタルツールを有効に活用することができ、多様な生徒が取り組むことが可能である。

どのような人が検査を受ける？【数学A・いろいろな確率】

本時の問題

新型コロナウイルス感染症(COVID-19)の感染拡大時期には、検査について様々な意見があった。例えば、国民全員が検査を受けるべきだという意見もあれば、発熱がある程度続いた人は受けるべきだという意見もあった。こうした意見について、下の問題を例に考えてみよう。



ある病原菌を検出する検査方法は、病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率が99%、病原菌に感染していない個体に対して誤って陽性と判定する確率が2%である。全体の1%が病原菌に感染しているとされる多数の個体の中から1つ取り出して検査するとき、「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」を求めよ。

●平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学A(2)イ(i)確率の性質や法則に着目し、確率を求める方法を多面的に考察すること。
- ・ 数学A(2)イ(㍑)確率の性質などに基づいて事象の起こりやすさを判断したり、期待値を意思決定に活用したりすること。

| |
|--|
| ●「数学の問題発見・解決の過程」における重点化 |
| ・様々な事象に活用する力 (D1) |
| ●「数学的推論と21世紀的な課題」への対応 |
| ・実生活の課題にからませて、数学的な解を求めること ・実社会の問題の中から、数学的な側面を見つけること |

1. 単元における本時の位置付け

単元名「いろいろな確率」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|---|-------|
| 第1次 | 独立な試行の確率の意味を理解し、簡単な場合の反復試行の確率を求めることができる。 | 4時間 |
| 第2次 | 条件付き確率の意味と確率の乗法定理を理解し、それらを用いていろいろな事象の確率を求めたり、数学的に考察したりすることができる。(本時は2/2) | 2時間 |
| 第3次 | 期待値について、具体例を通してその意味を理解し、期待値を求めたり、意思決定に活用したりすることができる。 | 2時間 |

なお、前時(第2次第1時)において人数の比で条件付き確率を求める問題を扱っている前提である。

2. 本時の目標

- 確率を用いて事象の起こりやすさを判断し、事象に対する自分の考えを述べることができるようにする。(思考力、判断力、表現力等)
- 事象を確率を用いて考察するよさを認識し、問題解決に確率を活用しようとしたり、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたりする態度を養う。(学びに向かう力、人間性等)

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|--|--------------|
| <p>問題を見いだす</p> <p>目的意識を持たせる工夫① 数学的に表現した問題だけではなく、日常生活や社会の事象も提示する</p> <p>新型コロナウイルス感染症(COVID-19)の感染拡大時期には、検査について様々な意見があった。例えば、国民全員に検査を受けさせるべきだという意見もあれば、発熱がある程度続いた人に限り受けさせるべきだという意見もあった。</p> <p>T:「あなたはどのように思いますか。ワークシートに書いてみよう。」</p> | |

| | |
|---|--|
| <p>S:「できるだけ多くの人が受けた方がいいけど費用の問題もありそう。」</p> <p>S:「感染した人が多い地域とそうでない地域で検査の仕方も変わってくるのではないか。」</p> <p>S:「検査では誤りが起こることがあると聞いたことがあるので、広げ過ぎない方がいいのでは。」</p> <p>T:「様々な意見がありますね。では、感染症の拡大時期における検査の拡充について、下の問題を例に考えてみましょう。」</p> <div data-bbox="220 607 1018 860" style="border: 1px solid black; padding: 10px; margin: 10px 0;"> <p>ある病原菌を検出する検査方法は、病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率が99%、病原菌に感染していない個体に対して誤って陽性と判定する確率が2%である。</p> <p>全体の1%が病原菌に感染しているとされる多数の個体の中から1つ取り出して検査するとき、「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」を求めよ。</p> </div> <p>T: (問題を提示して)「この確率は、いくつくらいだと思いますか。」</p> <p>S:「99%くらい。」</p> <p>S:「97%くらい。」</p> <p>S:「もう少し低いんじゃないかな。50%くらい。」</p> <p>T:「なんでそう思ったのですか。」</p> <p>S:「病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率が99%だからです。」</p> <p>S:「$99 - 2 = 97$だからです。」</p> <p>S:「病原菌に感染している人がそもそも少ないから。」</p> <p>S:「2%とか98%の意味がよくわからないので、前の時間のように人数で考えたいです。」</p> <p>T:「では、前時のように、それぞれの人が何人いるかで考えてみましょう。問題文にある『多数の個体』を、『10,000人』として考えてみます。陽性と判定された人は何人になりますか。そして、そのうち実際に病原菌に感染しているのは何人で、感染していないのは何人ですか。」</p> | <p>○まずは2つの主張に対する各自の意見を表出させる。</p> <p>○生徒とやり取りしながら進めて生徒が問題を見出せるようにする。</p> <p>○この問題がCOVID-19感染拡大時期の検査における数値を反映しているわけではないことに留意する。</p> <p>○百分率での表現(例えば、50%)のままでは、問題把握が難しい生徒も多いと思われるので、自然頻度で表現(例えば、100人のうち、50人)して考えさせる。また、まずは陽性と判定された人数を考えるよう指示する。</p> <p>○前時で、$\frac{\text{人数}}{\text{人数}}$で条件付き確率を求める問題を扱っている前提である。</p> <p>○まずは個別に考えるように指示する。</p> |
| <p>主に個別に考える</p> <p>●式のみで表現する反応例</p> <p>・例①: 問題状況を次のように整理する。</p> <ul style="list-style-type: none"> ▶10,000人中100人が、この病原菌に感染しているとされている。 ▶この病原菌に感染している100人のうち、99人は陽性と判定されている。 ▶この病原菌に感染していない9,900人のうち、198人は誤って陽性と判定されている。 | |

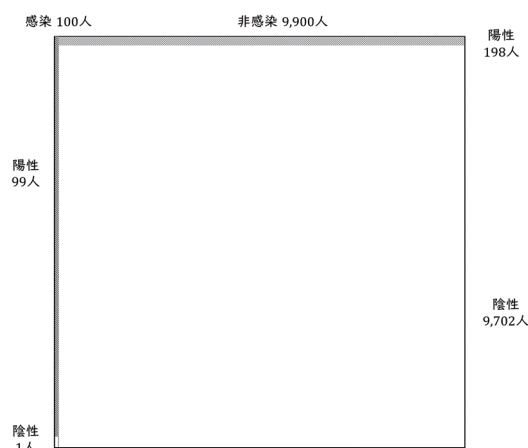
陽性と判定されている人数は $99 + 198 = 297$ (人)。このうち、実際には病原菌に感染している人は99人だから、求める確率は、

$$\frac{99}{297} = \frac{1}{3}$$

●主に図表で表現する反応例

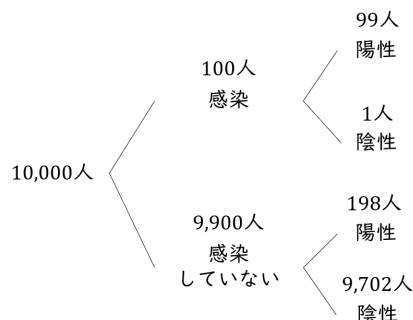
・例②：面積図を用いた反応

上のような図を書いて、確率を求める。



・例③：樹形図（決定木）を用いた反応

下のような図を書いて、確率を求める。



・例④：表を用いた反応

下のような表を書いて、確率を求める。

| | | 病原菌への感染 | | 計 |
|----|----|---------|-------|--------|
| | | あり | なし | |
| 検査 | 陽性 | 99 | 198 | 297 |
| | 陰性 | 1 | 9,702 | 9,703 |
| 計 | | 100 | 9,900 | 10,000 |

(人)

●その他

- ・例⑤：病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率をそのまま答える（99%）。
- ・例⑥：病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率（99%）から、病原菌に感染していない個体に対して誤って陽性と判定する確率（2%）を引いて答えとする（97%）。
- ・例⑦：思考が進まない。

●主体的に学習に取り組む態度：事象を文字で表現したり、図表を用いて整理しようとしていたりしている生徒の取組を取り上げ、「樹形図（決定木）を書いている人もいますね」などと教室全体に知らせることで、個人の考えの一部を教室全体に共有する。一方で、それでも思考が進まない生徒には、分かっている確率と知りたい確率を整理したり、全事象とみなす事象がこの検査方法で陽性と判定される事象であることを確認したりするよう促す。

○前時まで、様々な図表で確率を表現する経験をさせたい。

○面積図について、割合の大きさを正確に表現しようとする、網掛け部分が小さくなってしまったため、網掛け部分が大きくなるようデフォルメした図を書くことも考えられる。

○思考が進まない生徒は、問題把握が十分にできていないと考えられる。そこで、主に個別に考える時間の途中で、陽性と判定された人が何人いるかを確認したり、図や式を書いている生徒に、その一部を板書させたりするなどの足場がけを行い、再度、主に個別で考えさせる。

主に協働的に考える

● 考えの共有

まずは周囲と考えを共有するよう指示し、その後、複数の考えを取り上げる。

学びを深める工夫②
 誤答を分析させる

T: 「 $\frac{1}{3}$, 99%, 97%の3つの考えが出ました。この確率である理由、あるいはこの確率ではない理由を説明することはできますか。」

S: 「99%と97%は、10,000人中100人が病原菌に感染しているとされること（全体の1%に病原菌に感染しているとされる多数の個体）を考えていないので、『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』として正しくないと思います。例えば、病原菌に感染している人がいないとされる多数の個体の場合、『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』は0%になるので、99%や97%は違うと思います。」

S: 「計算すると、 $\frac{1}{3}$ になりました。（例①の計算を説明する）」

S: 「樹形図（決定木）で表すと、 $\frac{1}{3}$ になることがわかります。」

S: 「面積図や表で表しても、 $\frac{1}{3}$ になりました。」

T: 「 $\frac{1}{3}$ でよいですか。周囲の人と確認してください。」

S: 「予想より低いなあ。」

S: 「半分以下になっているけど正しいのかなあ。」

T: 「先ほどの99%と97%にはならないことの説明から、『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』には何が影響することがわかりますか？」

S: 「全体の何%が病原菌に感染しているかです。」

T: 「全体の何%が病原菌に感染しているかが変わると、『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』確率も変わるのかな。」

S: 「そういえば、感染した人が多い地域とそうでない地域で検査の仕方も変わってくるという意見を聞いたことがあります。」

T: 「では、デジタルツールで、病原菌に感染しているとされる多数の個体の割合を色々な値に変えてみて、そのときの『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』を調べてみましょう。」

S: 「病原菌に感染しているとされる多数の個体の割合を1%から10%に変え、と、『陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率』は約85%に上がりました。」

○生徒から意見が出なければ、「病原菌に感染しているとされる人の割合が0%や100%にした場合も、その考えが成り立つかどうか考えよう」と言い、極端な例を考えることを促す。

○条件付き確率を求めた生徒については、何に着目したのか、なぜそうしようとしたのかを問うなどして、数学的な見方・考え方を表出させるようにする。

○式のみで表現している生徒がいなかった場合、図表の表現を比較させた後に、「式のみで表現するとどうなるかな」と問うことも考えられる。

学びを深める工夫③
 確率に影響する要素を問う

○例えば、全体の何%が病原菌に感染しているかの数値を上げてみることは、感染リスクが高い集団について調べることを意味する。これは検査拡充について数学的論拠に基づいた自分の考えを持つに当たって大切な活動である。

○ここでのツールとしては、表計算ソフトやシミュレーションアプリが考えられる。

振り返る

●現実場面との関連付け

T:「ここまで調べてきた結果を踏まえ、改めて、検査拡充についてどんな意見を持つかをワークシートに記入しましょう。」

学びを深める工夫④

自己変容を自覚させる振り返り

●振り返り

T:「具体的な問題を解く前と後で自分の意見を書いてもらいました。それらを比較した上で、今日の授業で大事だと思ったことは何ですか。また、今日の授業を踏まえると、次にどんなことを考えてみたいですか。」

●思考・判断・表現：実際の検査拡充に関する意見に対して、下の問題の結果に基づいて主張しているか。

[発言・ワークシート]

●主体的に学習に取り組む態度：事象を確率を用いて考察するよさや、数学的論拠に基づき判断しようとしている自己の変容を認識しているか。

事例6の解説**1. 事例作成の意図**

本事例は、社会の事象について確率を用いて判断・意思決定する力を育成する事例である。まさに「建設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民に求められる、十分な根拠に基づく判断や意思決定をする助けとなる」数学的リテラシーの育成に該当する。

本事例では、まずは新型コロナウイルス感染症(COVID-19)の感染拡大時期に出された検査に対する意見という「日常生活や社会の事象」を提示し、それを数学化した、「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」を求める「数学的に表現した問題」を提示する。次に、その数学化した問題の「結果」を求め、その結果をもとの「日常生活や社会の事象」に活用させるという展開にした。このような展開にした理由は、生徒が、数学的に表現した問題の結果を求めるだけでなく、その求めた結果を踏まえて、日常生活や社会の事象について判断・意思決定できるようにしているためである。これは日常生活や社会の事象に数学的な見方・考え方を働かせることに他ならない。

一方で、本来的には生徒自身が数学化する力を身に付けて行く必要がある。しかし、本事例では、扱う事象（検査）の複雑さを考慮し、「数学的に表現した問題」は教師が示すこととした。

また、本事例では、百分率で表現された検査に関する情報を、自然頻度で表現し直す展開にした。自然頻度で表現した方が問題状況を正しく把握しやすいと考えたためである。なお、本授業過程は、自然頻度での問題解決を効果的に支援するために、前時に人数の比で条件付き確率を求める問題を扱っていることを前提としている。

2. 実践上のポイント**(1) 目的意識を持たせる工夫**

第一に、陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率を求める「数学的に表現した問題」だ

けを提示するのではなく、COVID-19感染拡大時期に出された意見という「日常生活や社会の事象」も提示することである。この工夫は、生徒に数学化を意識させ、問題解決の目的意識を持たせるといふねらいがある。

第二に、陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率を求める問題の状況を生徒に想起させながら（例えば、スライドを用いて問題を示すなどしながら）、求める「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」を予想させることである。生徒の予想は、99%や97%、50%くらいなど、様々に分かれることが予想される。このように予想が分かれると、生徒は「他者の考えを知りたい」、「自分の考えを反省したい」、「自分と他者の意見がなぜ異なるのか考えたい」などの目的意識を持つことが期待できる。

（２）学びを深める工夫

第一に、多様な数学的表現を表出させることである。自らの考えを表現したり、他者の表現を通して他者の考えを知ったり、さらに他者の表現との比較を通してより良い表現へと洗練させたりすることは、問題を多角的に捉え考察することにつながる。例えば、面積図を用いた反応と樹形図（決定木）を用いた反応を比較することで、問題の状況をより良く理解し、式で表現できるようになったり、式の意味を理解できるようになったりすると考えられる。

第二に、99%や97%などの、病原菌に感染しているとされる個体の割合を考慮しない誤った考えを取り上げ、極端な例を考えることなどによって修正することである。「解説」には、「生徒の誤った考えは、どのような誤解に基づいているのか、どこを改めれば正しい考えになるのか、などを考えさせることによってより深い理解に到達することが考えられる」（p.30）とある。

第三に、「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」（陽性的中率）に影響を及ぼす要素を問い、「全体の何%が病原菌に感染しているか」（感染率）が影響することを見いださせることである。このことにより、感染率が変わると陽性的中率がどう変わるかといったシミュレーションを行う必然性が生徒において生じてくる。この考察を通して、この事象の構造の理解を深めることができる。

第四に、「陽性だったとき、実際に病原菌に感染している確率」を求める前後で、COVID-19感染拡大時期に見られた、検査に対する様々な意見に対する自分の考えを表現し、自己の変容を自覚させることである。例えば、確率を求める前には「検査を受ける人は多い方がよいに決まっている」と考えていた生徒が、確率を求めた後に「発熱が一定期間続いた人に限って検査を受けないと、陽性だった人のほとんどが実際には病原菌に感染していない可能性があるという結果になってしまい、不要な隔離などが起きてしまう」といった考えに変わることなどが想定される。他にも、「陰性だったとき、実際は病原菌に感染している（偽陰性）確率」に着目し、意見を比較する生徒もいることが想定される。これらの生徒は、本時の問題解決を通して、同じ事象に対する見方・考え方が変容したと考えられる。このことを生徒自身が自覚できるよう、確率を求める前後で自分の意見を表現し、それを参照しながら振り返りを行う。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例では、より多くの生徒が問題解決に取り組むことができるようになると考え、百分率で表現された問題の条件を、授業過程で教師が自然頻度による表現に変えている。しかし、百分率の表現

のままで取り組むこともできる。あるいは、最初から自然頻度で表現して問題提示することもできる。生徒の実態に応じて、問題や問題提示を工夫することが可能である。

- 本事例では、多数の個体の中で病原菌に感染しているとされる個体の割合（感染率）を変えるシミュレーションを行ったが、病原菌に感染している個体に対して陽性と判定する確率（本時の問題では99%）や、病原菌に感染していない個体に対して誤って陽性と判定する確率（本時の問題では2%）を変えてみることも考えられる。その際、下図のような表計算ソフトやシミュレーションアプリなどを利用して調べることが考えられる。

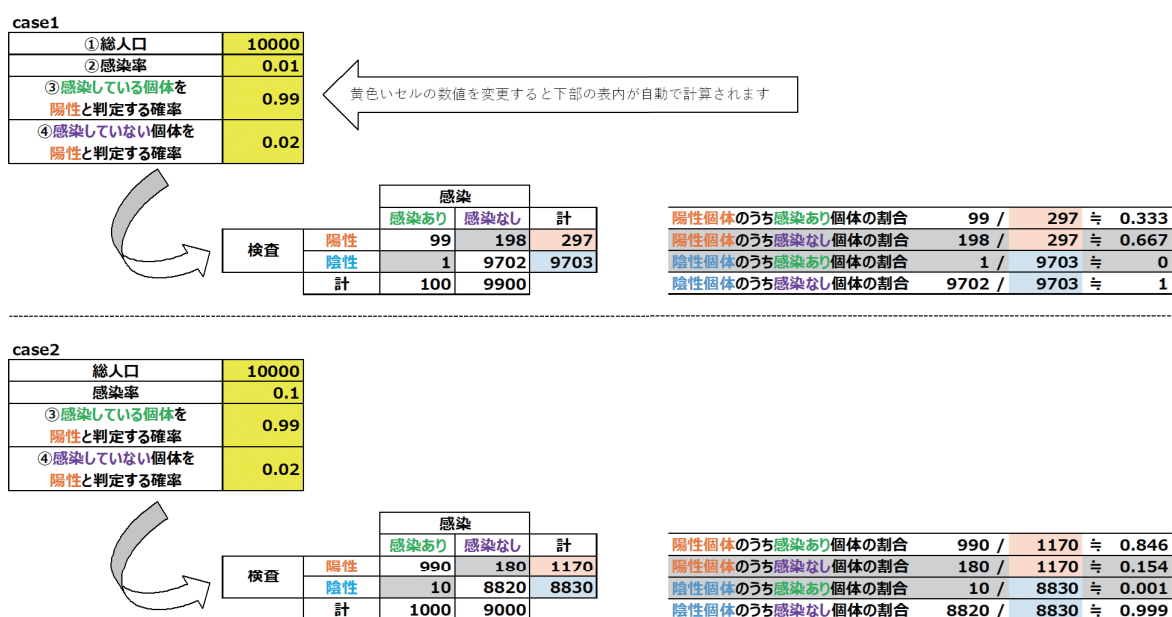


図2-6-1 表計算ソフトを用いたシミュレーション

事例
7デジタルツールと論理を用いて
問題発見する力を身に付ける事例

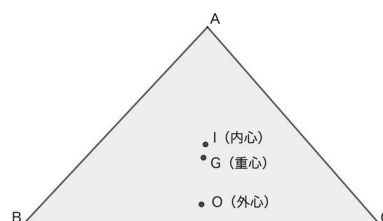
本事例のポイント

- デジタルツールを用いて図形を動的に捉える活動や、見いだした性質を定義に基づいて表現する活動を通して、数学の命題を定められるようになることを目指す。
- 条件が不確かな状況について生徒が自分でデジタルツールを操作して調べること、見いだした性質やその証明の方針を比較することで、数学の命題を定めようとする生徒の目的意識を高める。
- 生徒がデジタルツールを操作することによって、多様な命題を対象とすることができる。設定した命題すべてを証明の対象とせず、実態に応じて文献やインターネット等で調べる活動も取り入れることで、問題発見に焦点を当てた学習活動を行うことも可能である。

三角形の「中心」の秘密を探ろう【数学A・三角形と比】

本時の問題

右の図のような三角形について外心・内心・重心を作図したところ、一直線上に並んでいるように見えた。コンピュータを使って三角形をかき、その三角形の外心・内心・重心を作図し、その三角形を動かしてみて外心・内心・重心の位置関係について探ってみよう。



● 平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学A(1)イ(7)図形の構成要素間の関係や既に学習した図形の性質に着目し、図形の新たな性質を見だし、その性質について論理的に考察したり説明したりすること。

● 「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 数学の事象から問題を見いだす力 (A2)

● 「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・ 図、グラフ、シミュレーションから、数学的な情報を見つけ出すこと
- ・ コンピュータの数学的機能（作図ツール）を使うこと

1. 単元における本時の位置付け

単元名「三角形と比」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|---|-------|
| 第1次 | 三角形の内角の二等分線とその対辺の内分の比、及び、三角形の外角の二等分線とその対辺の外分の比を学び、それらの関係を統合的に理解する。 | 2時間 |
| 第2次 | 三角形の外心、内心、重心などについて定義と性質を学び、それらの位置関係について予想を立てて証明をする(本時は2/3)。※第1時にコンピュータを用いて外心、内心、重心の作図方法を学ぶ。 | 3時間 |
| 第3次 | 三角形の比に関する定理としてメネラウスの定理とチェバの定理やそれらの関係について理解する。 | 3時間 |

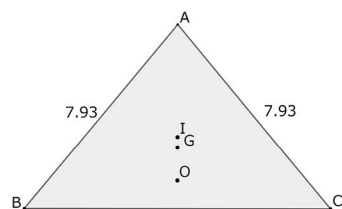
2. 本時の目標

- 図形を動的に捉えることによって、特殊な場合に成立する関係を見いだすとともに、その関係を定義に基づいて考察できるようにする。(思考力、判断力、表現力等)
- デジタルツールを用いて図形を動的に考察するよさを認識し、図形の定義やその一般性、特殊性に着目しようとしたりする態度を養う。(学びに向かう力、人間性等)

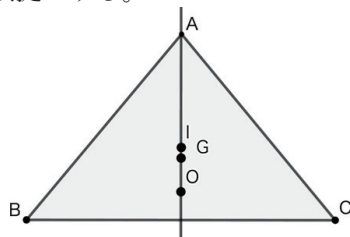
3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|---|--|
| 問題の状況を理解する T:「図のような三角形について外心・内心・重心を作図したところ、一直線上に並んでいるように見えました。作図ツールを使って三角形をかき、その三角形の外心・内心・重心を作図し、その三角形を動かしてみて外心・内心・重心の位置関係について探ってみましょう。そして、見つけたことをワークシートに書きましょう。」 S:「一直線よりは少しずれているんじゃないかな。」 S:「ぴったり一直線上に並ぶのはどのような三角形だろう。」 | ○作図ツールの使い方を支援する。 ○角の二等分線や垂直二等分線など、作図ツールのコマンドで作図できるものはその使用を促す。 ○作図ツールの使い方についての相談が可能になるように、ペアで取り組むように指示する。 |
| 主に個別に考える ●「二等辺三角形の場合には一直線上に並ぶ」ことの見いだし方についての反応例(次ページ) | ○この場面における図形に対する多様な見方がこの後の命題を定める活動における表現の検討を豊かにするので、確からしさや根拠に目を向けるように促す。 |

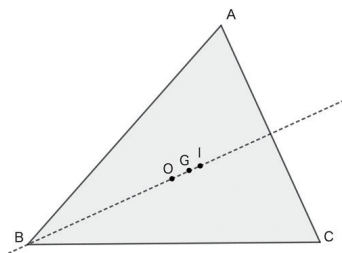
- ・ 三角形の頂点の位置を、内心・外心・重心が同一直線上になるように調整し、その場合の三角形の辺の長さや角の大きさを根拠にする。



- ・ 三角形が二等辺三角形になるように三角形の頂点の位置を調整し、辺BCの垂直二等分線と角Aの二等分線、角AからBCに引いた中線が重なることを根拠にする。



- ・ 上記の二例のような操作をした後で、図形の定義を根拠にする。
- 「正三角形の場合には内心・外心・重心が重なる」ことの見いだし方についての反応例
- ・ 三角形の頂点の位置を、内心・外心・重心が重なるように調整し、その場合の三角形の辺の長さや角の大きさを根拠にする。
- ・ 上記のような操作をした後で、図形の定義を根拠にする。
- その他の反応例
- ・ $BA = BC$ の二等辺三角形になっていることに気づかずに、二等辺三角形ではなくても一直線上に並ぶことがあるとする。



- ・ 三角形の辺の長さに着目できない。
- 命題として記述できている反応例
- ・ 例①：「ある三角形が二等辺三角形ならばその外心と内心と重心は同一直線上にある。」
- ・ 例②：「二等辺三角形の外心と内心と重心は同一直線上にある。」
- ・ 例③：「 $\triangle ABC$ で $AB = AC$ ならば、 $\angle A$ の二等分線と頂点Aから引いた中線、辺BCの垂直二等分線は一致する。」
- ・ 例④：「ある三角形が正三角形ならばその外心と内心と重心は一致する。」

○ 三角形の辺の長さに着目できない生徒たちには、3点が一直線上に並んで見える三角形を複数定めさせ、それらの共通点を問う。

○ 見いだした性質を記述する欄をワークシートに設けることで素朴な表現を用いている生徒をみとり、この後の表現を洗練させる活動に生かす。

● 主体的に学習に取り組む態度：三角形ABCの特殊性に着目している生徒の取り組みを価値付け、全体で共有する。

● 主体的に学習に取り組む態度：見いだした性質の説明を図形の定義を用いて洗練している生徒の取り組みを価値付ける。ただし、ここでは全体には共有しない。

[ワークシート]

○ 性質を見つけた生徒には、「できるだけ命題の形で書き直してみよう。」と投げかける。

○ 反応例①と②を区別するか否か（「pならばq」の形式に厳密にこだわるか否か）は生徒の実態に応じることとする。

| | |
|---|---|
| <p>●条件が重複する記述をしている反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> ・例⑤：「$\triangle ABC$で$AB = AC$ならば、この三角形の外心と内心と重心は$\angle A$の二等分線上にある。」（「内心」と「角の二等分線」との間で条件が重複） ・例⑥：「$\triangle ABC$で$AB = AC$ならば、この三角形の外心と内心と重心は頂点Aから引いた中線上にある。」（「重心」と「中線」との間で条件が重複） ・例⑦：「$\triangle ABC$で$AB = AC$ならば、この三角形の外心と内心と重心は辺BCの垂直二等分線上にある。」（「外心」と「垂直二等分線」との間で条件が重複） <p>●その他の不十分な記述の反応例</p> <ul style="list-style-type: none"> ・例⑧：「二等辺三角形ならば成り立つ。」（命題の結論部分が記述できていない） ・例⑨：「外心と内心と重心が同一直線上にある。」（命題の仮定部分が記述できていない） ・例⑩：「二等辺三角形の外心と内心と重心が直線上にある。」（「同一直線」であることが不明確） ・例⑪：「$\triangle ABC$で$AB = AC$ならば、角の二等分線と中線、垂直二等分線は一致する。」（どの角・辺についての直線か不明確） ・例⑫：「二等辺三角形ならば外心と内心と重心はきれいに並ぶ。」（表現が感覚的） | |
| <p>主に協働的に考える</p> <p>●証明の必要性を理解する。</p> <p>T：「皆さんが作図ツールを使って見いだしてくれた性質は、いつでも成り立つ性質でしょうか。」</p> <div data-bbox="694 1301 1021 1377" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> 目的意識を持たせる工夫① いつでも成り立つかを問う </div> <p>S：「作図ツールを使ったから間違えはなさそう。」</p> <p>S：「作図ツールは使ったけど、全部の二等辺三角形を調べたわけではないので、『いつでも』とは言えないと思います。」</p> <p>S：「作図ツールで表示した長さの値は概数になっていると思うので、いつでも成り立つかはわかりません。」</p> <p>S：「作図ツールを使った考察は、定義から証明したのではなくて観察しただけだから、いつでも成り立つことを示すためには証明をしなければならないと思います。」</p> <p>●考えの共有を通して、命題の内容や表現を洗練させる必要を理解する。</p> <p>T：「それではこの見いだした性質について、どのような方針で証明したらよいでしょうか。」</p> <div data-bbox="694 1899 1021 1998" style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 10px 0;"> 目的意識を持たせる工夫② 曖昧な表現や条件の過不足への着目を促す </div> | <p>○概数への着目は、デジタルツールを用いた操作からの予想が帰納的であることとは観点が異なっているが、デジタルツールを利用する上で重要な点であるので、この反応がいたら取り上げたい。</p> |

◆反応例⑧⑨のように「pならばq」の形式ではないもの、反応例⑩⑪のように条件が不足しているもの、反応例⑫のように適切な表現を用いていないものを全体で共有する。そして、それらをどのように証明するかの方針を問うことで、仮定または結論が欠けていることや条件が明確になっていないことなどを全体で共有する。

S:「⑧の書き方だと、何を証明すればいいかわかりません。」

S:「⑨の書き方だと、何を仮定にすればいいかわかりません。」

S:「⑩は辺の垂直二等分線、角の二等分線、中線が一致することを示せば証明できそうです。」

S:「⑩の書き方だと、外心と内心と重心が全て一つの直線上にあるかどうかかわかりません。」

S:「⑪の書き方も、〈 $\angle A$ の二等分線と辺ABの垂直二等分線〉のようにも捉えられるから、命題としては不適切です。」

◆見いだした性質について、証明できそうな命題として表現し直すことを全体に求める。

T:「証明の方針が立つように命題の内容や表現を洗練しよう。」

●考えを共有し命題を洗練する。

◆例⑩（「同一直線」であることが不明確）が条件不足であることを確認し、その修正案として、同一直線であることを明確に述べた例②や、その点については明確であるが条件に重複がある例⑤⑥⑦を導く。例⑤⑥⑦については重複している条件を除くことについて検討する。（その結果が例えば以下の(*)となる）

S:「⑩は〈直線上〉を〈同一直線上〉とすればいいと思います。」

S:「⑩は〈 $\triangle ABC$ で $AB = AC$ ならば、この三角形の外心と内心と重心は $\angle A$ の二等分線上にある〉としたらどうだろう。」

S:「その表現だと、内心はいつも〈 $\angle A$ の二等分線上にある〉を満たすから、〈 $\triangle ABC$ で $AB = AC$ ならば、この三角形の外心と重心は $\angle A$ の二等分線上にある〉(*)としたらいいと思います。」

◆反応例⑩のような表現がなかった場合には、反応例①②の証明の方針を立てる中で下記のような発言を引き出す。

T:「①の〈ある三角形が二等辺三角形ならばその外心と内心と重心は同一直線上にある。〉はどのような方針で証明しますか。」

S:「内心の定義は各頂点の角の二等分線の交点だから、外心や重心がこの角の二等分線上にあることを示せばいいと思います。」

S:「外心の定義は各辺の垂直二等分線の交点だから、内心や重心がこの垂直二等分線上にあることを示せばいいと思います。」

◆反応例⑪（どの角・辺についての直線か不明確）が条件不足であることを確認し、その修正案として角や辺を明確に述べた反応例③を導く。

学びを深める工夫①

素朴な表現を積極的に取り上げて洗練させる

○協働的に考える前に個人で命題の表現を洗練する時間をとる。

○反応例⑤⑥⑦における重複の検討や、その結果と反応例③の比較については、生徒の実態に応じて省略し、証明の方針を立てることや証明をつくることをとおして洗練させたり関連付けたりする。

●思考・判断・表現：作図ツール利用を通して見いだした特殊な場合に成立する関係について、定義に基づいて思考・表現できているか。

[ワークシート]

○証明をつくること自体は本授業の主たる目標ではないことに留意する。

S:「⑪は、角の二等分線（内角の二等分線）、垂直二等分線、中線がそれぞれ3本ずつあるから、どこか1箇所の頂点と対辺の組を選べばいいと思います。」

◆(*)と反応例③（または別の位置に着目した同様な命題）を比較し、それらが同一の内容になっていることを確認する。

T:「命題(*)と、S（例③）さんのつくってくれた〈△ABCで $AB = AC$ ならば、 $\angle A$ の二等分線と頂点Aから引いた中線、辺BCの垂直二等分線は一致する〉は、どのような関係になっていますか。」

S:「(*)は2つの点と1つの直線についての性質を証明する命題になっています。」

S:「(*)の2つの点は、それぞれ垂直二等分線と中線上の点だから、証明はSさんの命題と同じになります。」

S:「⑩を洗練させた〈同一直線〉は、この三角形の角の二等分線であって、垂直二等分線であって、中線であればいいということですね。」

●得られた命題について証明の方針を立て、証明をつくる。

・例⑬: $AB = AC$ である△ABCの $\angle A$ の二等分線と辺BCの交点をDとし、 $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ を示すことで $AD = CD$ かつ $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ を証明し、結論を述べる。

・例⑭: $AB = AC$ である△ABCの辺BCの垂直二等分線が頂点Aを通らないと仮定する。また、辺BCの中点をMとする。このとき、 $\angle A$ の二等分線を引くところの直線は辺BCを垂直に二等分する。すなわち、点Mを通る辺BCの垂線が二つ存在することになるので仮定が誤っている。したがって辺BCの垂直二等分線は頂点Aを通り（ $\triangle ABM \equiv \triangle ACM$ なので） $\angle A$ を二等分する。

●問題を発展的に扱う

正三角形についての反応例④を共有して、二等辺三角形についての証明と同様に証明できるか問う。生徒の実態に応じて、垂心を紹介して、内心・外心・重心との位置関係を問うことも考えられる。

○反応例③の証明をつくる際、 $\angle A$ の二等分線が辺BCの垂直二等分線になることの証明は、必要であれば中学校の内容の学び直しとして扱う。一方、辺BCの垂直二等分線が $\angle A$ の二等分線になることについては中学校で扱っていないことも考えられる。ここでこの後者の命題が前者の命題の逆に相当していること、及び、改めて証明が必要であることを確認する。生徒の実態に応じて、実際に証明の方針を立て、証明をつくる。

振り返る

T:「今日の授業のように、図形の性質を見だし、命題の形で書く上で大切なことはどのようなことだったでしょうか。」

学びを深める工夫②
方法について省察する。

S:「コンピュータを使って作図をして図形を動かすことで、成り立つ性質の予想が立てやすくなる。」

S:「コンピュータを使ったとしても見いだした性質は予想に過ぎないので、常に成り立つことを定義に基づいて証明することや、証明に取り組むことができるような命題を立てることが大切。」

●主体的に学習に取り組む態度：デジタルツールを用いて図形を動的に考察するよさを認識しているか。定義に基づいて図形を考察するよさを認識しているか。

[振り返りシート]

事例7の解説

1. 事例作成の意図

本事例では、「数学的推論と21世紀的な課題」への対応を視野に入れ、デジタルツール（ここでは作図ツール）を用いて図形を動的に操作する活動を取り入れた。作図ツールを用いて図形を動的に扱うことによって、生徒が図形の一般性や特殊性に意識を向けることが期待できる。またその長所の一方で、作図ツールの操作は観察やコンピュータ上での実測の域を出ないものであるが故に、図形の定義に基づく推論の必要性が強調される。

また、二等辺三角形や正三角形という特殊な場合における重心、内心、外心の位置関係を取り上げ、見いだした性質を命題として定める過程に焦点を当てた。三角形の重心、内心、外心などの存在証明を扱う上では、三角形に関する3直線が1点で交わるという数学的な魅力の実感が不可欠である。しかしながら、それは、3本の直線が1点で交わることが稀であることの理解に基づいて実感されるものであるため、生徒によっては実感されにくいものであると考えられる。また、3本の直線が1点で交わることが稀であるが故に、このことを予想することは容易ではない。加えて、重心、内心、外心などの存在の証明として一般的に扱われる証明は、中学校以来慣れ親しんでいる図形の合同を根拠とする証明ではないことから、難しさを感じる生徒もいることが想定される。このような理由から、本事例では、そうした存在証明ではなく、二等辺三角形や正三角形という特殊な場合における重心、内心、外心の位置関係を取り上げた。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

証明することについての目的意識を高めるために、生徒が自分でデジタルツールを操作して見いだした性質がいつでも成り立つかを問う。

また、見いだした性質やその証明の方針を比較させ、曖昧な表現や条件の過不足への着目を促し、数学の命題を定めようとする目的意識を高める。

(2) 学びを深める工夫

全国学力・学習状況調査（中学校数学）では、見いだした性質を命題の形式で表現することに課題があることが指摘されている¹⁷。このことから推察されるように、生徒たちは素朴な表現をすることが想定される。そのような素朴な表現を積極的に取り上げる。また、洗練していく際に、証明の方針を立てる活動を取り入れ、命題の仮定と結論を明確にしたり、反例がないように条件を精査したりすることを促す。

さらに振り返りで、図形の性質を見いだし命題として表す方法について省察させる。デジタルツールを用いて帰納的に考察することと、定義に基づいて演繹的に考察することは数学において相補的な関係になっており、そのような方法についての知識は汎用的である。この点についての学びの場とし

17 例えば令和6年度調査の6(3)で「～は…になる。」という形で書く問題の正答率は42.5%である。

て本事例を位置付けることが考えられる。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例に先立つ第2次第1時には、三角形の重心、内心、外心を紹介したり、作図ツールを用いて作図したりするような授業を想定している。これは先述のように、重心、内心、外心の存在証明は、生徒によっては難しい場合があることを想定したものである。本事例のあとに、本事例の学習内容と関連付けて、重心、内心、外心の存在証明を扱うことも考えられる。
- 本事例では、正三角形の場合を発展的な学習内容として位置付けている。この「発展」は難易度を高めるという意味ではなく、学習経験に関連付けた新たな展開のことを指している。したがって正三角形の場合については、二等辺三角形の場合の証明を参考に新たに命題を定めて証明するような学習過程（学習方法の応用）と、二等辺三角形の場合で確かめた事実を用いて命題を証明するような学習過程（学習結果の応用）の両方を取り上げたい。もちろん、三角形の包摂関係に着目し、二等辺三角形で成り立つことは正三角形でも成り立つと考えることも大切にしたい。
- 先述のように、本時は証明すべき命題を予想したり、図形の定義に基づいて命題を定めたりする問題発見の過程に焦点を当てている。その過程では、角の二等分線と垂直二等分線が一致することを示すために「二等辺三角形において、頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する」という中学校で学習した命題を再度扱うことを想定している。この点について、生徒の実態に応じてこの命題の逆を扱うことによって、新たな証明についての学習の機会を設けることも考えられる。
- 作図ツールを用いて図形を動的に扱えることから、発展的な内容として垂心を扱った後に、さらなる発展としてオイラー線を扱うことが考えられる。問題発見に焦点を当てた学習活動の場とするために、この証明は、自分たちで考えさせるのではなく、文献やインターネット等で調べさせることも考えられる。

事例
8論理的に考えることの楽しさや
よさを感じ得る事例

本事例のポイント

- 論理パズルに取り組むことによって、論理的に考えることの楽しさやよさをすべての生徒が感得することを目指す。
- パズルに数学的な要素を見だし、数学Ⅰにおける「集合と命題」の学習と関連付けるなどして数学としての学びを深める。
- 論理パズルだけでなく、数理パズルの奥深い世界を調べてみることを通して、数学と文化や人間の活動との関わりについて理解を深める。

正直者を探そう【数学A・数学と人間の活動】

本時の問題

A, B, Cの3人が右のように言っている。
 正直者は正しいことしか言わない。これに対して、うそつきは正しくないことしか言わない。
 3人のうち、正直者はただ1人で、2人はうそつきである。
 この3人のうち、正直者は誰だろうか。



わたしは正直者です。



Aはうそつきです。



Bはうそつきです。

● 平成30年告示学習指導要領との対応

- ・ 数学A(3)ア(i)数学史的な話題，数理的なゲームやパズルなどを通して，数学と文化との関わりについての理解を深めること。
- ・ 数学A(3)イ(i)パズルなどに数学的な要素を見だし，目的に応じて数学を活用して考察すること。

● 「数学の問題発見・解決の過程」における重点化

- ・ 論理的に推論する力 (C)

● 「数学的推論と21世紀的な課題」への対応

- ・ 変数，記号，あるいは図表を用いて状況を数学的に表すこと

1. 単元における本時の位置付け

単元名「数学史的な話題や数理的なゲーム・パズルと数学」

| | 学習内容 | 授業時間数 |
|-----|--|-------|
| 第1次 | 数学史的な話題や数理的なゲーム・パズルから数学的な要素を見だし、数学を活用して考察するとともに、数学と文化の関わりについて理解を深める。(本時は1/4) | 4時間 |

2. 本時の目標

- パズルに数学的な要素を見だし、論理的に考察できるようにする。(思考力、判断力、表現力等)
- 論理的に考えることの楽しさやよさを認識し、粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしたら、問題解決の過程を振り返って考察を深めたりする態度を養う。(学びに向かう力、人間性等)

3. 本時の授業過程の例

| 主な発問(T)と生徒の学習活動及び予想される生徒の反応(S) | 評価(●)・留意点(○) |
|--|--|
| 問題を見いだす T:「昔から、世界各地に数、図形、論理など、数学に関わるパズルゲームが存在していました。そうしたパズルで遊びながら、数学の発展を見つめていきましょう。」 T:「今日は、論理パズルを考えてみましょう。」(本時の問題を提示する) <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin-top: 10px; width: fit-content;"> 目的意識を持たせる工夫① 十分な時間を確保する </div> | ○本時では、まずは個々で考えるように指示する。 |
| 主に個別に考える <ul style="list-style-type: none"> ・例①：i) Aが正直者だと仮定したとき、ii) Bが正直者だと仮定したとき、iii) Cが正直者だと仮定したときの場合に分けて考察し、i と iii の場合は矛盾が生じることを指摘する。 ・例②：それぞれの主張を整理してAとCが同様の主張をしていることに気付き、Bが正直者になるしかないことを指摘する。 ・例③：AとBの言っていることが互いの否定になっていることから、そのどちらかが正直者であることに気づく。 ・例④：思考が進まない。 | ●主体的に学習に取り組む態度：粘り強く考え数学的論拠に基づき判断しようとしている [ワークシート] ○例④のような生徒には、例えばAが正直者だとして考えを進めてみるとどうなるかをたずねてみる。 |
| 主に協働的に考える① ●考えの共有 まずは周囲と考えを共有するよう指示し、その後、例③の生徒がいればそこから取り上げ、次に例①を取り上げる。 S:「Aは自分が正直者だと言い、BはAがうそつきだと言っているのだから、AかBのどちらかに正直者がいると思います。」 | |

S:「ということは、Cはうそつきなのかな。」

S:「私は、それぞれが正直者だったらどうなるかを考えてみました。Aが正直者だとすると、Cはうそつきとなり正しくないことを言っているのでBは正直者となります。そうすると、正直者が2人になってしまいます。Bが正直者だとすると、AとCが言っていることは矛盾しません。Cが正直者だとすると、Bの言っていることは正しくないで、Aは正直者ということになります。そうすると、Aは正しいことを言っていることになり、Aがうそつきでもあり正直者でもあることになるので矛盾します。よってBが正直者です。」

S:「似た考えですが、Aが正直者だとするとBはうそつきとなりますが、Cの言っていることからBは正直者となってしまいます。」

S:「それって、BがうそつきならCは正しいことを言っていることになるから、Cも、うそつきでもあり正直者でもあることになってしまいますね。」

※解説にある反応例を参照

○場合に分けた考察であっても、様々な表現や説明が考えられる。例③により絞り込んで2つの場合のみ調べることも考えられる。

○同じ考えでも矛盾する点の言及は異なると考えられるため、いくつか取り上げる。

学びを深める工夫

数学的な要素を見いだして既習事項と結び付ける

●例①の説明に数学的な要素を見いだす

T:「Bが正直者でAとCがうそつきだとわかりました。このうち、『Aはうそつきである』ことの証明について確認しましょう。それはどのようにして証明されましたか？」

S:「Aが正直者だとするとおかしいことが起きるということを示しました。」

T:「そのような証明方法をこれまでに学びませんでしたか。」

S:「背理法？」

T:「背理法とは何でしたか。少し時間をとるので各自で教科書を使って背理法について振り返り、『Aはうそつきである』ことの証明を見直してみましょう」

S:「なるほど、『Aがうそつきである』が成り立たない、つまり、Aは正直者であると仮定して、矛盾を導いたのですね。」

T:「はじめから『Aはうそつきである』という結論があったわけではないので意識的に背理法を用いたわけではないかもしれませんが、自然とその考えをしていたと言えるかもしれませんね。」

●例②の共有とパズルの仕組みについての議論

T:「A、B、Cがそれぞれ言っていることを踏まえて、Bが正直者と決まる仕組みを調べてみましょう。Sさんはどんなことに気付いていましたか。」

S:「CはBがうそつきだと言っていますが、BはAがうそつきだと言っているの、Cは結局Aが正直者だと言っていることになります。ということはAとCは両方ともAが正直者だと言っていて、BはAがうそつきだと言っていることになります。」

○本時は数学Ⅰの「集合と命題」が既習である前提である。なお、本時の問題を教材として「集合と命題」において背理法などを学習することも考えられる。

○背理法に関する発言がみられないときは、生徒による例①の説明を整理することも考えられる。

○「命題」という用語の意味を確認する。

○気づいている生徒がいない場合、「CはAについては何と言っているのか」と問うことなどが考えられる。

| | |
|---|--|
| <p>S:「なるほど、だからAとCのどちらかだけがうそつきだと仮定すると矛盾が生じるのか。AとCは結局同じことを言っているのだから。」</p> <p>S:「ということは、言っていることはそのまま、正直者が2人とうそつきが1人にしてうそつきを見つけることに変えてもパズルとして成立するね。」</p> | <p>○次の活動に向けて、ここで問題の条件を変えることを扱っておくことが考えられる。</p> |
| <p>主に個別に考える②</p> <p>T:「いまのパズルを基にして、今度は自分で正直者とうそつきのパズルを作ってみましょう。そのあとお互いにパズルを出し合ってもらいますので、自分で答えがちゃんとわかるようにしておいてくださいね。」</p> <div data-bbox="699 696 1018 763"> <p>目的意識を持たせる工夫② 問題をつくって解き合う</p> </div> <ul style="list-style-type: none"> ・例⑤: 人数を増やす。 ・例⑥: 言い方にバリエーションを加える。 ・例⑦: 思考が進まない。 | <p>●主体的に学習に取り組む態度: 問題解決の過程を振り返って考察を深めている [ワークシート]</p> <p>○例⑦の生徒には、元のパズルの条件を変えてみる(例えば人数を増やしてみる)ことを示唆する。</p> |
| <p>主に協働的に考える②</p> <p>S: 自分で作成したパズルを互いに出し、解き合う。</p> | <p>●思考・判断・表現: 論理的に考察できている。 [ワークシート]</p> |
| <p>振り返る</p> <p>T:「パズルを出し合ってみてどんな感想を持ちましたか。」</p> <p>S:「遊んでいるみたいで楽しかった。」</p> <p>S:「自分で問題を作ることで仕組みがよくわかった。」</p> <p>S:「簡単に解かれてしまったのもう少し難しくしてみたい。」</p> <p>S:「他の種類のパズルもあるはずなので調べてみたい。」</p> <p>T:「はるか昔から現在に至るまで、人々は数学に関わるパズルを楽しんできました。結果としてそのことが、数学に興味を持つ人を増やし、人々の数学的な教養を高め、数学の発展に一役買ってきたのかもしれない。次の時間も、数学と文化や人間の活動との関わりについて理解を深めていきましょう。」</p> | <p>○感想を簡潔に書かせてみてから共有することも考えられる。</p> |

事例8の解説

1. 事例作成の意図

本事例では、生徒が論理的に考えることの楽しさやよさを認識できることを意図した。論理的に考えることのできる市民を育成することの重要性は論を俟たない。PISA2022では、数学的リテラシーを身に付けることの核心として「数学的推論」の重要性がより強調されたところである。

「論理パズル」には遊戯という意味とともに、前提知識をあまり必要としないがために誰でも取り

組みやすいという側面がある。すなわち、数学A「数学と人間の活動」で、数理的なゲームやパズルに取り組むことには、数学が得意だったり好きだったりする生徒だけでなく、数学の学習に対してなかなか前向きになれない生徒であっても、論理的に考えることの楽しさやよさを認識することが比較的实现しやすいと考えられる。

そして、このように論理パズルを楽しむこと（論理的に考えることを楽しむこと）が、数学と文化や人間の活動との関わりについて理解を深めるうえで大切な経験になる。実際、例えば江戸時代の和算では、人々が問題の解決自体を楽しみ、あえて答えが書かれていない問題に挑戦し、自分もまた新たに問題を作って後世に託すという文化が生まれた。論理パズルを楽しむ、また自分でも作成し、こうした文化をほんの少しであっても疑似体験することは、数学が人間の本性に基づく創造物であるという認識につながると考えられる。

2. 実践上のポイント

(1) 目的意識を持たせる工夫

まず、取り組む問題がパズルであるから、生徒は比較的目的意識を持ちやすいと考えられる。パズルを純粋に楽しむこと自体が一つの目的であることを生徒と共有できるようにすることが大切である。また、パズルを楽しむ上では達成感を味わうことも必要であると考えられることから、生徒がパズルに取り組む時間を十分確保する必要がある。

次に、本事例では、自分でパズルを作成し、それを互いに出し解き合う活動を取り入れる。他者が楽しみながら解くことに向けて自分でパズルを作成することは、目的意識を持った主体的な活動となりうると考えられる。

(2) 学びを深める工夫

上でも述べたように、あまり前提知識がなくても取り組めるのがパズルのよさであり、本時の論理パズルも、数学の内容をあまり意識せずに取り組むことが可能なものとなっている。その取り組みやすさが楽しさへとつながりうる一因ではあるが、本事例では楽しむことに留まるのではなく、そこから論理的に考えることの楽しさやよさの認識を促す。そこで、パズルに取り組むことから学びを深める工夫として、このパズルに潜む数学的な要素を見いだし、その仕組みまで含めて考察していくことが考えられる。例えば、下記の反応例（授業過程の例①）のような素朴な反応を取り上げ、その背後には背理法の考えがあることを認識できるようにすることが考えられる。これは背理法の学び直しにもなると考えられる。

生徒の反応例（例①）

Aが正直者のとき

A：正直者 B：Aはうそつき→Aは正直者 C：Bはうそつき→Bは正直者

Bがうそつきと正直者になってしまうので矛盾が生じる

Bが正直者のとき

A：私は正直→私はうそつき B：Aはうそつき C：Bはうそつき→Bは正直者

これは矛盾が生じない

Cが正直者のとき

A：私は正直→私はうそつき B：Aはうそつき→Aは正直者 C：Bはうそつき

Aがうそつきと正直者になってしまうので矛盾が生じる

Bが正直者であるときだけ矛盾が生じないので、Bが正直者である。

さらに、なぜAやCを正直者とするとき矛盾が生じ、Bが正直者と決まるのかという仕組みを考察していくことが大切である。その際、次の反応例（授業過程の例②）のように、AとCが同様の主張をしていることに気付く生徒がいれば積極的に取り上げるようにする。

生徒の反応例（例②）

A：わたし（A）は正直者である

B：Aはうそつきである

C：Bはうそつきである→Aは正直者である

正直者が1人でうそつきが2人だから、Bが正直者となるしかない。

このようにしてパズルの仕組みまで考察すると、自分で条件を変えて新たなパズルを作成することが可能となる。例えば人数を4人に増やしてDを加え、正直者が1人という条件は変えない（いまはB）のであれば、Dも「Aは正直者である」と言っていることになるようなセリフにすることが考えられる。

なお、上記のようにパズルに数学的な要素を見いだすに当たっては、数学的な見方・考え方が働くことに留意する必要がある。例えば反応例①の説明に背理法が使われていることを見いだすに当たっては、反応例①の説明における論理に着目し、筋道を追い、整理する必要がある。このように、他者の説明における論理に着目し、その正しさを判断することは、数学の学習場面のみならず、建設的で積極的かつ思慮深い21世紀の市民として大切な数学的な見方・考え方であるといえる。

3. さらなる指導の充実に向けて

- 本事例で取り上げた論理パズルはあくまで一例であり、数理的なゲームやパズルは奥深い世界を成している。そこで、他にどんな数理パズルがあるか、それはいつどこで発祥したのか、また現代においては数理的なゲームやパズルがどのように取り組まれているのかといったことを生徒自身が調べてみることも考えられる。論理パズルに関しては、正直者とうそつきが登場するものも他にたくさんあり、他の有名なものには帽子の色に関わるものなどがある。
- 本次の学習内容は「数学史的な話題や数理的なゲーム・パズルから数学的な要素を見だし、数学を活用して考察するとともに、数学と文化の関わりについて理解を深める」ことであることを踏まえると、日本の和算の問題に取り組んだり、和算について調べてみたりすることが考えられる。和算は数学史的な話題と数理的なパズルの両方の要素を併せ持つと考えられる。
- 本事例のような論理パズルを取り上げるのであれば、数学Ⅰにおける「集合と命題」の内容と関連付けることが大切である。また、数学Ⅰにおいて「集合と命題」の内容を学ぶ際にも、本事例のような論理パズルを教材とすることが考えられる。

本指導資料の作成に当たっては、以下の有識者のご協力をいただきました。

| | |
|-------|-------------------------------|
| 厚美 香織 | 神奈川県立厚木清南高等学校・総括教諭 |
| 石橋 一昂 | 岡山大学学術研究院教育学域・講師 |
| 杉村 綾美 | 東京都立第三商業高等学校・教諭 |
| 西村 圭一 | 東京学芸大学大学院教育学研究科・教授 |
| 野島 淳司 | 東京学芸大学附属国際中等教育学校・教諭 |
| 花園 隼人 | 宮城教育大学・准教授 |
| 三上 真未 | 北海道教育庁学校教育局高校教育課高校教育指導係主任指導主事 |

(50音順 敬称略 職名は令和7年2月現在)

文部科学省においては、次の者が本書の作成・編集に当たりました。

| | |
|-------|---------------------|
| 武藤 久慶 | 初等中等教育局教育課程課長 |
| 小林 廉 | 初等中等教育局教育課程課教科調査官 |
| 山本 悟 | 初等中等教育局教育課程課課長補佐 |
| 高市 和則 | 初等中等教育局教育課程課専門官 |
| 近藤 亜弥 | 初等中等教育局教育課程課教育課程第二係 |
| 清水 涼香 | 初等中等教育局教育課程課教育課程第二係 |

(職名は令和7年2月現在)

